

本日やること

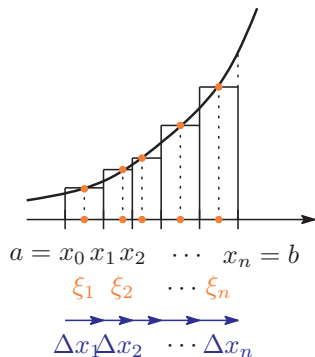
① 積分法

- 定積分の定義の復習
- 微分と積分の関係

定積分法

復習

[復習：定積分の定義] $a < b$ のとき



$$\mathcal{P} : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

$$x_{k-1} \leq \xi_k \leq x_k, \quad k = 1, \cdots, n$$

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}, \quad k = 1, \cdots, n$$

$$|\mathcal{P}| = \max_{k=1, \cdots, n} |\Delta x_k|$$

として

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{|\mathcal{P}| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k$$

と定める.

[大事なこと] $f(x)$ が有界な閉区間 $[a, b]$ で連続 \Rightarrow 積分可能

定積分法

微分と積分の関係

[目標]

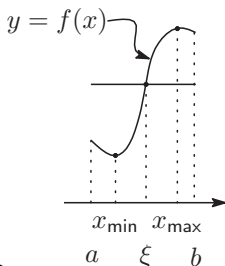
$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \quad \text{ただし } F(x) \text{ は } f(x) \text{ の原始関数}$$

高校ではこれが定義。今回はこれは定理。

定積分法

微分と積分の関係

積分の平均値の定理



$f(x) : [a, b]$ で連続

$$\Rightarrow \int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b - a), \quad a \leq \xi \leq b$$

となる ξ が存在する.

[確かめ] $f(x)$ は $[a, b]$ で連続だから $[a, b]$ において

最大値 : $M = f(x_{\max})$, 最小値 : $m = f(x_{\min})$

がある. (最大値最小値の定理.)

定積分法

微分と積分の関係

$m \leq f(x) \leq M$ であるから

$$m(b-a) = \int_a^b m \, dx \leq \int_a^b f(x) \, dx \leq \int_a^b M \, dx = M(b-a)$$

したがって

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \, dx \leq M$$

だから

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \, dx = f(\xi)$$

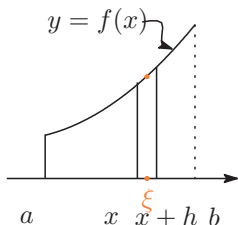
となる ξ が x_{\max} と x_{\min} の間に存在する。(連続関数に対する中間値の定理)

ここに現われる $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \, dx$ を区間 $[a, b]$ における関数 $f(x)$ の平均値という。

定積分法

微分と積分の関係

微分積分学の基本定理



$f(x) : [a, b]$ で連続

$$\Rightarrow \frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x)$$

$\int_a^x f(t) dt = F(x)$ とおくと $F(x)$ は $f(x)$ の原始関数になっている。つまり**連続関数は原始関数を持つ**といってよい。

定積分法

微分と積分の関係

[確かめ] 積分の平均値の定理により

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt = f(\xi), \quad x \leq \xi \leq x+h$$

となる ξ があるが, $h \rightarrow 0$ のとき $\xi \rightarrow x$ したがって $f(\xi) \rightarrow f(x)$.

定積分法

微分と積分の関係

定積分と原始関数の関係

$f(x) : [a, b]$ で連続

$F(x) : f(x)$ の原始関数

$$\Rightarrow \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \quad \left(\text{これを} = \left[F(x) \right]_a^b \text{と書く} \right)$$

[確かめ] $G(x) = \int_a^x f(t) dt$ とおくと $f(x)$ の原始関数になっている. だからある定数 C があって

$$G(x) = F(x) + C.$$

定積分法

微分と積分の関係

$x = a$ を代入して

$$G(a) = F(a) + C.$$

$G(a) = 0$ だから

$$F(a) = -C.$$

$x = b$ を代入して

$$G(b) = F(b) + C = F(b) - F(a).$$

$G(b) = \int_a^b f(t) dt$ だから結論が得られた。