本日やること

1. 積分法
   - 定積分の考え方
   - 定積分の定義
   - 定積分の性質

定積分法

初めに

[復習：不定積分]

$$\int f(x)\,dx = F(x)\,(+C) \iff \frac{d}{dx}F(x) = f(x)$$

[定積分:高校での定義]

$f(x)$ の a から b までの定積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ を

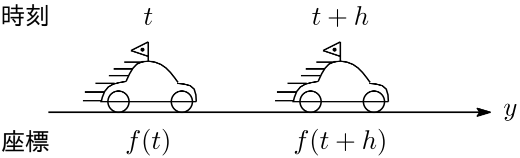
$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \quad \text{ただし } F(x) \text{ は } f(x) \text{ の原始関数}$$

によって 高校では 定めたのであった. $\longrightarrow$ $\displaystyle\int f(x)\,dx$ が計算できないとき困るので, 原始関数を用いない定義を考える.

定積分法

導入

動点の時刻 t での座標を $y = f(t)$ とする.



このとき

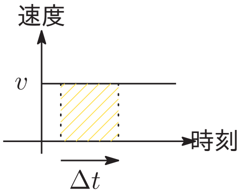
(時刻 t の) 瞬間の速度 $v(t) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(t+h) - f(t)}{h} = \dfrac{dy}{dt}$

今回は逆に $v(t)$ から位置の変化 $f(b) - f(a)$ を知りたい.

定積分法

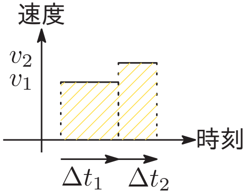
導入

[$v =$ 一定の場合]　($v \geqq 0$ とする)



位置の変化量 $= v \times \Delta t = \square$ の面積

[v が変化する場合]

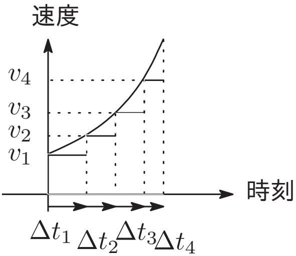


位置の変化量 $= v_1\,\Delta t_1 + v_2\,\Delta t_2 = \square$ の面積

定積分法

導入

[v が連続的に変化する場合]



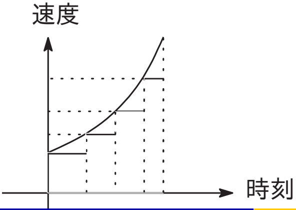
位置の変化量

$$\fallingdotseq v_1\,\Delta t_1 + v_2\,\Delta t_2 + v_3\,\Delta t_3 + v_4\,\Delta t_4$$

$= \square$の面積

$\downarrow$

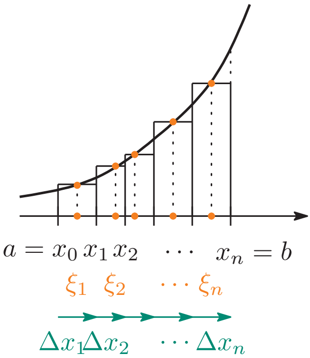
$\square$の面積



定積分法

定積分の定義

この考え方に沿って定積分を定義する.



$y = f(x)$: 関数　$a < b$ とし,

$\mathcal{P} : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$

: 区間 $[a, b]$ の分割

$x_{k-1} \leqq \xi_k \leqq x_k,\ k = 1, \cdots, n$

: 小区間 $[x_{k-1}, x_k]$ の代表の点

$\Delta x_k = x_k - x_{k-1},\ k = 1, \cdots, n$

: 小区間 $[x_{k-1}, x_k]$ の長さ

とする.

$|\mathcal{P}| = \max_{k=1,\cdots,n} |\Delta x_k|$ と定め分割 $\mathcal{P}$ の幅という.

定積分法
定積分の定義

定積分の定義 (I)

$$\lim_{|\mathcal{P}|\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

が $\{x_k\}$, $\{\xi_k\}$ の取り方によらず存在するとき, $f(x)$ は区間 $[a,b]$ で積分可能であるという. この極限を $f(x)$ の a から b までの定積分とよび, $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ で表す. つまり

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{|\mathcal{P}|\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k \cdots (\star)$$

である. a を積分の下端, b を上端という.

定積分法

定積分の定義

定積分の定義 (II)

a を下端, b を上端とするとき, $a > b$ の場合も $(\star)$ で定義する. ただしこのとき

$$\mathcal{P} : a = x_0 > x_1 > \cdots > x_n = b$$
$$x_{k-1} \geqq \xi_k \geqq x_k, \ \ k = 1, \cdots, n$$
$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1} (\leqq 0), \ \ k = 1, \cdots, n$$

である.

したがって

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx, \quad \int_a^a f(x)\,dx = 0$$

定積分法

定積分の定義

[例] 定数関数の場合。

$f(x) = c$, $a \leqq x \leqq b$　(c は定数) とすると, ξ_k によらず常に $f(\xi_k) = c$, $k = 1, \cdots, n$ だから

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} c\Delta x_k = c(b-a)$$

したがって

$$\int_a^b c\,dx = c(b-a)$$

定積分法

定積分の定義

[例] $f(x) = x$ $(a \leqq x \leqq b)$ の場合。
$f(x)$ は連続だから積分可能。したがって $\lim_{|\mathcal{P}|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$ が $\{x_k\}$, $\{\xi_k\}$ の取り方によらず存在することが知られている。そこで特別に

$$x_k = a + \frac{k(b-a)}{n}, \quad \xi_k = x_k, \ k = 1, \quad \Delta x_k = \frac{b-a}{n}, \ (k = 0, 1, \cdots, n)$$

とすると

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k &= \sum_{k=1}^{n} \left(a + \frac{k(b-a)}{n} \right) \frac{(b-a)}{n} \\
&= \sum_{k=1}^{n} a \frac{(b-a)}{n} + \sum_{k=1}^{n} \frac{k(b-a)}{n} \frac{(b-a)}{n} \\
&= a(b-a) + \frac{(b-a)^2}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k = a(b-a) + \frac{(b-a)^2}{n^2} \frac{n(n+1)}{2} \\
&\to \frac{1}{2}(b-a)(b+a) = \frac{1}{2}(b^2 - a^2)
\end{aligned}$$

定積分法

定積分の定義

したがって

$$\int_a^b x\,dx = \frac{1}{2}(b^2 - a^2)$$

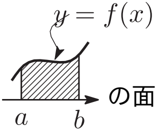
定積分法

定積分の性質

定積分の大事なこと

(I) $f(x)$ が $[a,b]$ で連続 $\Rightarrow$ $[a,b]$ で積分可能

(II) $f(x) \geqq 0$, $a < b$ のとき

$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx =$  の面積

(III) 数直線上の動点の時刻 t での座標を $y = f(t)$, 速度を $v(t)$ とすると

$\displaystyle\int_a^b v(t)\,dt = f(b) - f(a)$ (時刻 a から b までの位置の変化量)

定積分法

定積分の性質

定積分の性質

(i) $$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(y)\,dy$$

(ii) $$\int_a^b \{f(x)+g(x)\}\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

(iii) $$\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$$ (ただし k は x によらない定数)

定積分法

定積分の性質

定積分の性質 (続き)

(iv) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

(v) 区間 $[a,b]$ で $f(x) \geqq g(x)$ ならば $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \geqq \int_a^b g(x)\,dx$

特に, $f(x) \geqq 0$ ならば $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \geqq 0$

(vi) $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqq \int_a^b |f(x)|\,dx$ (ただし $a < b$ の場合)