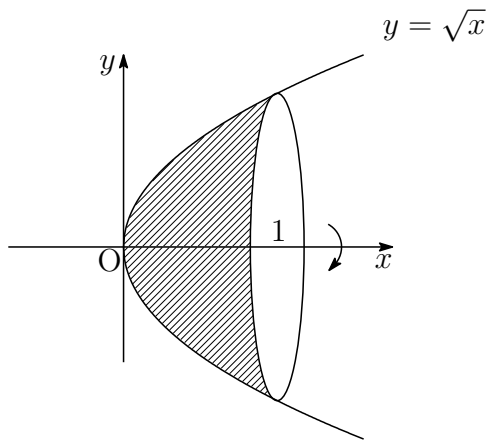


電気のための微分積分C 第6回解答

- 6.1 $y = \sqrt{x}$ のグラフ, $x = 0$, $x = 1$ と x 軸で囲まれる図形を x 軸の周りで1回転してできる図形の体積を求めよ.

この立体を点 $(x, 0, 0)$ を通り x 軸と垂直な平面で切った切り口は半径 \sqrt{x} の円であり, 面積は πx であるから体積は

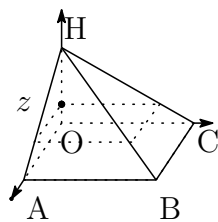
$$V = \int_0^1 \pi(\sqrt{x})^2 dx = \left[\pi \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{\pi}{2}$$



- 6.2. 図のような空間図形の体積を求めよ。ただし

$A(a, 0, 0)$, $B(a, b, 0)$, $C(0, b, 0)$, $H(0, 0, h)$

とする。



これは $OABC$ を底面とする高さ h の錐体である。底面積 S は $S = ab$, 高さ z で xy 平面に平行に切った切り口の面積を $S(z)$ とすると底面と切り口は相似で

相似比 = $h : (h - z)$, 面積比 = $h^2 : (h - z)^2$

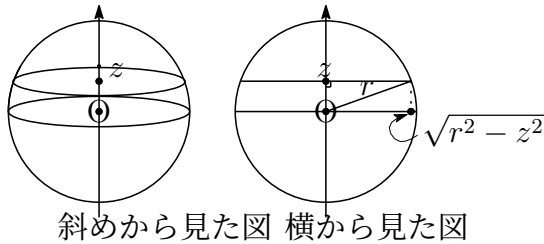
だから

$$S(z) = \frac{(h - z)^2}{h^2} S$$

体積はこれを z について積分して

$$\int_0^h \frac{(h-z)^2}{h^2} S dz = S \int_0^h \left(1 - 2\frac{z}{h} + \frac{z^2}{h^2}\right) dz = S \left[z - \frac{z^2}{h} + \frac{z^3}{3h^2} \right]_0^h = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3}abh$$

6.3. (1) 図のような半径 r の球の体積を求めよ。



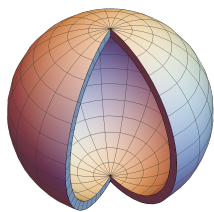
$(0, 0, z)$ をとおき z 軸に垂直な面で切った切り口は円板であり、その半径は図より $\sqrt{r^2 - z^2}$ の円板だから、切り口の面積は $\pi(r^2 - z^2)$ 、したがって体積はこれを積分して

$$\int_{-r}^r \pi(r^2 - z^2) dz = \pi \left[r^2 z - \frac{z^3}{3} \right]_{-r}^r = \pi \left[r^2 z - \frac{z^3}{3} \right]_{-r}^r = \frac{4}{3}\pi r^3$$

(2) (1) で求めた球の体積を $V(r)$ 、表面積を $S(r)$ とし、 $h >$ とする。

$$S(r) < \frac{V(r+h) - V(r)}{h} < S(r+h)$$

であることを説明せよ。



図のような半径 r と半径 $r+h$ の球面で囲まれた部分 $G(h)$ を考える。(図では一部を切り開いて表示してある。) $G(h)$ の体積は $V(r+h) - V(r)$ であるが、厚みが h であることから

$$S(r)h < V(r+h) - V(r) < S(r+h)h$$

と考えられる。この両辺を h で割れ。

(3) (2) で $h \rightarrow 0$ とすることにより $S(r)$ を r で表せ。

$h \rightarrow 0$ とすると $S(r+h) \rightarrow S(r)$ であるから

$$S(r) \leq \frac{dV(r)}{dr} \leq S(r)$$

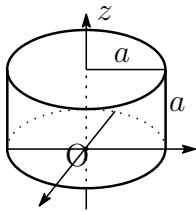
一方

$$\frac{dV(r)}{dr} = \left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)' = 4\pi r^2$$

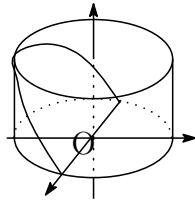
であるから

$$S(r) = 4\pi r^2$$

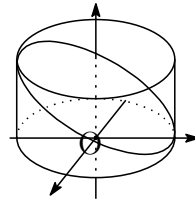
6.4.



(a)

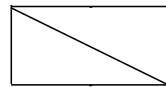
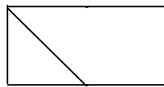


(b)



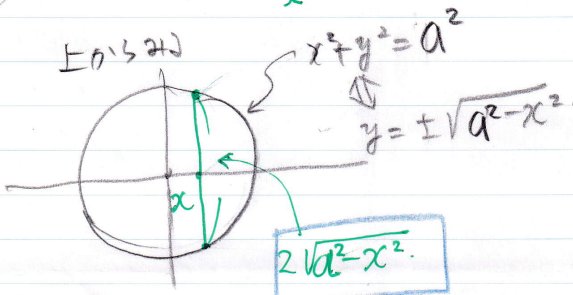
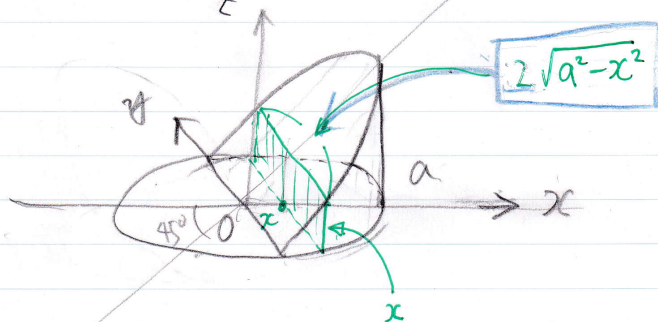
(c)

横から見たところ →



6.2. (a) $V = \pi a^3$

(b)



$S(x) = 2x\sqrt{a^2 - x^2}$

tips.

$$V = \int_0^a 2x\sqrt{a^2 - x^2} dx \Rightarrow \int_a^0 2x\sqrt{t} \left(-\frac{dt}{2x}\right) = (*)$$

Hint $(a^2 - x^2 = t)$ とおく

$$\left. \begin{array}{l} \frac{dt}{dx} = -2x \\ x \Big|_0 \rightarrow a \\ t \Big|_{a^2} \rightarrow 0 \end{array} \right\} \text{tips}$$

$$(*) = \int_0^{a^2} \sqrt{t} dt = \left[\frac{2t^{3/2}}{3} \right]_0^{a^2} = \frac{2}{3} a^3 //$$

(c) : 円柱の半分だから $\frac{1}{2} \pi a^3$