電気のための微分積分C 第4回解答

基本事項

[1] $\displaystyle\int f(x)\,dx = F(x) \quad\Rightarrow\quad \int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a)\ \left(\text{これを} = \Big[F(x)\Big]_a^b \text{と書く}\right)$

[2] $\displaystyle\int_a^b f'(x)g(x)\,dx = \Big[f(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx$

[3] $\displaystyle x=\varphi(t),\ \varphi(\alpha)=a, \varphi(\beta)=b \ \Rightarrow\ \int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$

4.1. 次の定積分を計算せよ。

(1) $\displaystyle\int_0^2 (x^2-3x+2)\,dx$

$$\int (x^2-3x+2)\,dx = \int x^2\,dx - 3\int x\,dx + 2\int\,dx = \frac{x^3}{3}-\frac{3}{2}x^2+2x$$

だから

$$\int_0^2 (x^2-3x+2)\,dx = \left[\frac{x^3}{3}-\frac{3}{2}x^2+2x\right]_0^2$$
$$= \left(\frac{8}{3}-\frac{3}{2}\times 4+4\right)-(0) = \frac{8}{3}-6+4 = \frac{2}{3}$$

(2) $-kx=t$ とおくと $dx=-\dfrac{dt}{k}$ だから

$$\int e^{-kx}\,dx = \int e^t\left(-\frac{dt}{k}\right) = -\frac{1}{k}\int e^t\,dt = -\frac{1}{k}e^t = -\frac{1}{k}e^{-kx}$$

(3) (2) の結果より

$$\int_0^\infty e^{-kx}\,dx = \left[-\frac{1}{k}e^{-kx}\right]_0^\infty = \left(-\frac{1}{k}e^{-\infty}\right)-\left(-\frac{1}{k}e^0\right) = \frac{1}{k}$$

(4) (2) より

$$\int e^{-kx}\,dx = -\frac{1}{k}e^{-kx}$$

だから

$$\left(-\frac{1}{k}e^{-kx}\right)' = e^{-kx}$$

不定積分の部分積分法を利用する。

$$\begin{aligned}
\int xe^{-kx}\,dx &= \int \left(-\frac{e^{-kx}}{k}\right)' \times x\,dx \\
&= \left(-\frac{e^{-kx}}{k}\right) \times x - \int \left(-\frac{e^{-kx}}{k}\right) \times (x)'\,dx \\
&= \frac{-xe^{-kx}}{k} + \int \frac{e^{-kx}}{k}\,dx \\
&= \frac{-xe^{-kx}}{k} + \frac{1}{k}\left(-\frac{e^{-kx}}{k}\right) \\
&= \frac{-(kx+1)e^{-kx}}{k^2}.
\end{aligned}$$

(5) $\displaystyle\int_0^\infty xe^{-kx}\,dx$

広義積分の場合でも (もし積分が収束するならば) 部分積分法を使うことができる。

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty xe^{-kx}\,dx \\
&= \int_0^\infty \left(-\frac{e^{-kx}}{k}\right)' \times x\,dx \\
&= \left[\left(-\frac{1}{k}e^{-kx}\right) \times x\right]_0^\infty - \int_0^\infty \left(-\frac{1}{k}e^{-kx}\right) \times 1\,dx \\
&= \left[\left(-\frac{1}{k}e^{-kx}\right) \times x\right]_0^\infty - \left[\left(-\frac{1}{k}\right)^2 e^{-kx}\right]_0^\infty \\
&= \lim_{x\to\infty}\left(-\frac{1}{k}e^{-kx} \times x\right) - \left(-\frac{1}{k}e^0 \times 0\right) - \left(-\frac{1}{k^2}e^{-\infty}\right) + \left(\frac{1}{k^2}e^0\right) \\
&= \frac{1}{k^2}
\end{aligned}$$

ここで $e^{-\infty} = 0$, $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^{kx}} = 0$, $k > 0, n = 0, 1, 2, \ldots$ を使った。教科書 112 ページを見よ。

(6) $\left(\tan^{-1} x\right)' = \dfrac{1}{1+x^2}$ だから

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \left[\tan^{-1} x\right]_0^\infty = \tan^{-1}(\infty) - \tan^{-1} 0 = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$$

または $x = \tan t$ とおいて

$$dx = \frac{dt}{\cos^2 t},\ \frac{1}{1+\tan^2 t} = \cos^2 t,\ x = 0 \Rightarrow t = 0,\ x \to \infty \Rightarrow t \to \frac{\pi}{2}$$

に注意すると

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\,dt = \frac{\pi}{2}$$

(7) $\displaystyle\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{2x+1}}$

$2x+1 = t$ とおくと, $dx = \dfrac{dt}{2}$ より

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x+1}} = \int \frac{1}{\sqrt{t}}\frac{dt}{2} = \sqrt{t} = \sqrt{2x+1}$$

だから

$$\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{2x+1}} = \left[\sqrt{2x+1}\right]_0^4 = \sqrt{2\times 4+1} - \sqrt{2\times 0+1}$$
$$= 3 - 1 = 2$$

である。しかし

$$\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{2x+1}} = \int_0^4 \frac{1}{\sqrt{t}}\frac{dt}{2} = \left[\sqrt{t}\right]_0^4 = \sqrt{4} - \sqrt{0} = 2$$

は誤り。

$x = 0$ のとき $t = 1$, $x = 4$ のとき $t = 9$

だから

$$\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{2x+1}} = \int_1^9 \frac{1}{\sqrt{t}}\frac{dt}{2} = \left[\sqrt{t}\right]_1^9 = \sqrt{9} - \sqrt{1} = 2$$

が正しい。

(8) $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^4 \frac{dx}{\sqrt{2x+1}}$

$x=-\dfrac{1}{2}$ で定義できないから広義積分であることに注意。

$x=-\frac{1}{2}$ のとき $t=0$, $x=4$ のとき $t=9$

だから

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{4}\frac{dx}{\sqrt{2x+1}}=\int_0^9\frac{1}{\sqrt{t}}\frac{dt}{2}=\left[\sqrt{t}\right]_0^9=\sqrt{9}-\sqrt{0}=3$$

(9) $\displaystyle\int\cos 2x\,dx=\frac{1}{2}\sin 2x$ だから

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2x\,dx=\left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}\sin\pi-\frac{1}{2}\sin 0=0$$

(10) $\displaystyle\int_1^5\sqrt{2x-1}\,dx$

$2x-1=t$ とおくと,

$dx=\dfrac{dt}{2}$, $x=1\Rightarrow t=1$, $x=5\Rightarrow t=9$

より

$$\int_1^5\sqrt{2x-1}\,dx=\int_1^9\sqrt{t}\frac{dt}{2}=\left[\frac{1}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_1^9=\frac{1}{3}(9^{\frac{3}{2}}-1^{\frac{3}{2}})=\frac{26}{3}$$

(11) $\displaystyle\int_0^1 x\sqrt{x^2+1}\,dx$

$x^2+1=t$ とおくと,

$dx=\dfrac{dt}{2x}$, $x=0\Rightarrow t=1$, $x=1\Rightarrow t=2$

より

$$\int_0^1 x\sqrt{x^2+1}\,dx=\int_1^2 x\sqrt{t}\frac{dt}{2x}=\left[\frac{1}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_1^2=\frac{1}{3}(2\sqrt{2}-1)$$