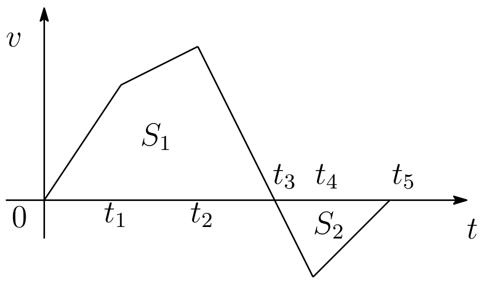
電気のための微分積分C
第1回解答

1.1. 直線上を運動する動点 P がある. 時刻 t での P の速度 $v(t)$ のグラフは図のようである.



(1) 最も速度が大きくなる時刻はいつか

最も速度が大きくなる時刻は 縦座標が最大になる点だから t_2.

(2) 最も出発点から遠ざかる時刻はいつか. またそのときの出発点からの距離をグラフと t 軸で囲まれる図形の面積 S_1, S_2 を用いて表せ.

$0 < t < t_3$ では $v(t) > 0$ だから点は右方向に運動する. $t = t_3$ で一瞬停止して $t_3 < t < t_5$ では $v(t) < 0$ だから点は左方向に運動する. したがって, 最も出発点から遠ざかる時刻は 最も右へ行く時刻だから $t = t_3$. そのときの出発点からの距離は

$$\int_0^{t_3} v(t)\,dt = S_1.$$

(3) 時刻 t_5 での出発点からの距離と, それまでに動いた道のりを S_1, S_2 を用いて表せ.

時刻 t_5 での出発点からの位置の変化量は

$$\int_0^{t_5} v(t)\,dt = \int_0^{t_3} v(t)\,dt + \int_{t_3}^{t_5} v(t)\,dt$$

ところで $t_3 < t < t_5$ の範囲では $v < 0$ であるから $\int_{t_3}^{t_5} v(t)\,dt = -S_2$

となるので $= S_1 - S_2$

それまでに動いた道のりは

$$\int_0^{t_5} |v(t)|\,dt = \int_0^{t_3} |v(t)|\,dt + \int_{t_3}^{t_5} |v(t)|\,dt = S_1 + S_2.$$

1.2. 空中を自由落下する物体は地球の引力によって鉛直下向きに $g\,(= 9.8[m/s^2])$ の加速度が生じる。つまり, 時刻 $t[s]$ の下向きの速度を $v(t)[m/s]$ とするとき

$$\frac{d}{dt}v(t) = g$$

である. したがって速度 $v(t)$ は g の原始関数である. 従って時刻 $0[s]$ から $t_1[s]$ までの速度の変化は, 「速度と座標の変化量の関係」と同様の考え方で定積分を用いて

$$v(t_1) - v(0) = \int_0^{t_1} g\,dt = gt_1$$

のように求められる. (記号 t_1 を使ったのは積分に使われる変数 t と同じ記号を使いたくなかったからです。) だから t_1 を t に置き換えることにより時刻 t での速度 $v(t)$ は $v(0)$, g を用いて

$$v(t) = gt + v(0)$$

と表される.

(2) 時刻 $t_1[s]$ での物体の座標を $y(t_1)[m]$ とすると 「速度と座標変化量の関係」は

$$y(t_1) - y(0) = \int_0^{t_1} v(t)dt$$

であるから (1) の結果を使って

$$y(t_1) - y(0) = \int_0^{t_1} v(t)\,dt = \int_0^{t_1} (gt + v(0))\,dt$$

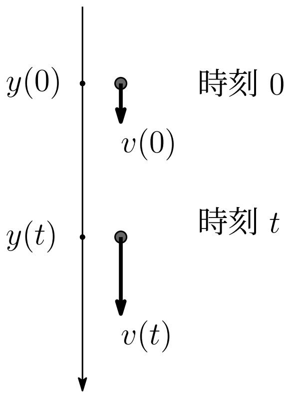
となるが、授業中にやった「定数関数と一次関数の定積分」の結果を使えば

$$= \frac{1}{2}gt_1^2 + v(0)t_1$$

となる. だから t_1 を t に置き換えることにより時刻 t での座標 $y(t)$ は $y(0)$, $v(0)$, g を用いて

$$y(t) = \frac{1}{2}gt^2 + v(0)t + y(0)$$

と表される.



1.3.

(1) は (e)　(2) は (c)　(3) は (a)　(4) は (b)　(5) は (d)