電気のための微分積分C 試験解説

1. (1) $\int_1^3 (2x^2-3x)\,dx$.

まず不定積分する。

$$\int (2x^2-3x)\,dx = 2\int x^2 dx - 3\int x\,dx$$

$$= 2\times\frac{x^3}{3} - 3\times\frac{x^2}{2} \ (+C)$$

だから原始関数は $\frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2$。

これを用いて定積分を計算する。

$$\int_1^3 (2x^2-3x)\,dx = \left[\frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2\right]_1^3$$

$$= \left(\frac{2}{3}\times 3^3 - \frac{3}{2}\times 3^2\right) - \left(\frac{2}{3}\times 1^3 - \frac{3}{2}\times 1^2\right)$$

$$= \frac{16}{3}.$$

定積分と不定積分を区別すること。

分数の計算を慎重に行うこと。

Department of Mathematics
Hiroshima Institute of Technology

(2) $\displaystyle\int_0^2 \sqrt{4x+1}\,dx$.

$4x+1=t$ ⊛ とおいて置換積分するしか方法はない

⊛の両辺を x で微分すると $4=\dfrac{dt}{dx}$

この両辺に $\dfrac{dx}{4}$ をかけて $\boxed{dx=\dfrac{dt}{4}}$

また、$\begin{cases} x=0 \text{ のとき } t=\boxed{1}, \\ x=2 \quad〃 \quad t=\boxed{9} \end{cases}$

だから

$$\int_0^2 \sqrt{4x+1}\,\boxed{dx} = \int_{\boxed{1}}^{\boxed{9}} \sqrt{t}\,\boxed{\frac{dt}{4}} = \frac{1}{4}\int_1^9 \sqrt{t}\,dt$$

(ここで $\displaystyle\int \sqrt{t}\,dt = \int t^{\frac{1}{2}}dt = \frac{t^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} = \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}$ だから.)

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_1^9 = \frac{1}{4}\times\frac{2}{3}\left(9^{\frac{3}{2}}-1^{\frac{3}{2}}\right)$$

$$= \frac{1}{6}(27-1) = \frac{26}{6} = \frac{13}{3} \quad //$$

別解.

$\displaystyle\int \sqrt{4x+1}\,dx = \frac{1}{6}(4x+1)^{\frac{3}{2}}$ だから

$\displaystyle\int_0^2 \sqrt{4x+1}\,dx = \left[\frac{1}{6}(4x+1)^{\frac{3}{2}}\right]_0^2$ も可.

x 積分の範囲と t 積分の範囲を区別すること。

Department of Mathematics
Hiroshima Institute of Technology

(3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos 2x\,dx$ …… $(*)$

($\int \cos 2x\,dx = \frac{1}{2}\sin 2x + C$ を利用して
部分積分する。)

$$(*) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)' dx$$

$$= \left[x\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{(x)'}_{=1}\,\frac{1}{2}\sin 2x\,dx$$

($\int \sin 2x\,dx = -\frac{1}{2}\cos 2x$ であるから)

$$= \left[\frac{x}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left[\frac{1}{4}\cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \left\{\frac{\pi}{4}\underbrace{\sin\pi}_{=0} - \frac{0}{2}\sin 0\right\} + \left\{\frac{1}{4}\underbrace{\cos\pi}_{=-1} - \frac{1}{4}\underbrace{\cos 0}_{=1}\right\}$$

$$= -\frac{1}{2}$$ //

Department of Mathematics
Hiroshima Institute of Technology

(4) $\int_0^1 x(2x-1)^4\,dx.$

$2x-1=t$ とおいて置換積分する。

を両辺 x で微分して $2=\frac{dt}{dx}$.

両辺 $\frac{dx}{2}$ をかけて $\boxed{dx=\frac{dt}{2}}$.

$\begin{cases} x=0 \text{ のとき } & t=\boxed{-1}, \\ x=1 \quad 〃 & t=\boxed{1}. \end{cases}$

を x について解いて $\boxed{x=\frac{t+1}{2}}$

だから

$$\int_0^1 x(2x-1)^4\,\boxed{dx}=\int_{-1}^{1}\frac{t+1}{2}\,t^4\,\boxed{\frac{dt}{2}}$$

$$=\frac{1}{4}\int_{-1}^{1}(t^5+t^4)\,dt$$

$$=\frac{1}{4}\left[\frac{t^6}{6}+\frac{t^5}{5}\right]_{-1}^{1}$$

$$=\frac{1}{4}\left\{\left(\frac{1^6}{6}+\frac{1^5}{5}\right)-\left(\frac{(-1)^6}{6}+\frac{(-1)^5}{5}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{10}.$$

Department of Mathematics, Hiroshima Institute of Technology

別解

$\int (2x-1)^4 dx = \frac{1}{10}(2x-1)^5$ を利用して

部分積分すると

$$\int_0^1 x(2x-1)^4 dx = \int_0^1 x\left(\frac{1}{10}(2x-1)^5\right)' dx$$

$$= \left[x\left(\frac{1}{10}(2x-1)^5\right)\right]_0^1 - \int_0^1 1\cdot\frac{1}{10}(2x-1)^5 dx$$

$$= \left[\frac{x}{10}(2x-1)^5\right]_0^1 - \left[\frac{1}{120}(2x-1)^6\right]_0^1$$

$$= \left(\frac{1}{10}-\frac{0}{10}\right) - \left(\underbrace{\frac{1}{120}\times 1^6 - \frac{1}{120}(-1)^6}_{=0}\right)$$

$$= \frac{1}{10}$$ //

も可

Department of Mathematics,
Hiroshima Institute of Technology

(5) $\int_0^\infty e^{-2x}\,dx$

(a が 0 でない定数のとき $\int e^{ax}dx = \frac{1}{a}e^{ax}$.
だから.)

$$= \left[\frac{e^{-2x}}{-2}\right]_0^\infty$$

$$= -\frac{1}{2}\left\{\underset{\overset{\shortparallel}{0}}{e^{-\infty}} - \underset{\overset{\shortparallel}{1}}{e^{0}}\right\} = \frac{1}{2} \,/\!/$$

Department of Mathematics,
Hokkaido Institute of Technology

(6) $\int_0^\infty x e^{-2x}\,dx$.

$\int e^{-2x}\,dx = \dfrac{e^{-2x}}{-2}$ を利用して部分積分.

$$= \int_0^\infty x\left(\frac{e^{-2x}}{-2}\right)' dx$$

$$= \left[-\frac{1}{2}\, x e^{-2x}\right]_0^\infty - \left(-\frac{1}{2}\right)\underbrace{\int_0^\infty 1\times e^{-2x}\,dx}_{=\frac{1}{2}}$$

(5)より

$$\left[-\frac{1}{2}\, x e^{-2x}\right]_0^\infty = -\frac{1}{2}\underbrace{\lim_{x\to\infty} x e^{-2x}}_{=0} + \frac{1}{2}\times 0 \times e^0$$

Hint より

$$= \frac{1}{4} \quad /\!/$$

Department of Mathematics,
Hiroshima Institute of Technology

1. (1) 関数 $y=f(x)$ のグラフ とは、
実数 x と y に $y=f(x)$ の関係があるとき、
座標 (x,y) の点をあつめた集合
のことである。
だから $y=x^2-x-2$ のときは、

$x=-2,-1,0,1,2,3$ のとき、$y=f(x)$ となる y は、

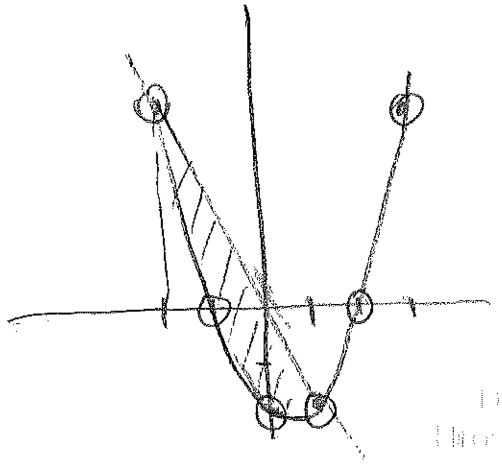
$y=4,0,-2,-2,0,4$ であるから、

グラフは 点 $(-2,4)$, $(-1,0)$, $(0,-2)$, $(1,-2)$, $(2,0)$, $(3,4)$
をとおる。これだけでグラフの概形がかける。

$y=-2x$ に対しても同様である。

また (x,y) が交点であるときは、x,y は
$y=x^2-x-2$ と $y=-2x$ を両方みたすから

$$\begin{cases} y=x^2-x-2 \\ y=-2x \end{cases}$$ をといて $(-2,4)$, $(1,-2)$



Department of Mathematics
Hiroshima Institute of Technology

(2) 囲まれる部分の x 座標の範囲は、

$-2 \leqq x \leqq 1$ であり、この範囲で

$$-2x \geqq x^2 - x - 2$$

だから

囲まれる部分の面積

$$= \int_{-2}^{1} \{(-2x) - (x^2 - x - 2)\}\, dx$$

$$= \int_{-2}^{1} (-x^2 - x + 2)\, dx$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x\right]_{-2}^{1}$$

$$= \frac{9}{2}$$ //

Department of Mathematics,
Hiroshima Institute of Technology

3.

$$\int_a^x f(t)\,dt = x^2+3x-4 \quad \text{☆}$$ とする。

両辺を x で微分すると、
微積分学基本定理（教科書の定理 6.10）により

左辺： $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$.

一方右辺は： $\dfrac{d}{dx}(x^2+3x-4) = 2x+3$.

だから $f(x) = 2x+3$.

☆ で $x=a$ とおくと、

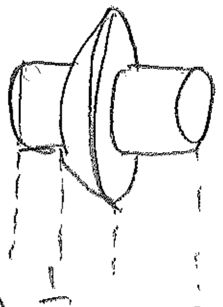
$$\underbrace{\int_a^a f(t)\,dt}_{=0} = a^2+3a-4,$$

だから $a^2+3a-4=0$.

これをといて、 $a=-4,\ 1$,

Department of Mathematics
Hiroshima Institute of Technology

4.



$$\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \pi\, dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 x^2 \pi\, dx + \int_1^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \pi\, dx$$

$$= \frac{2}{3}\pi.$$

Department of Mathematics
Hiroshima Institute of Technology