

# 積分の基本事項集(増訂)

学生番号

--	--	--	--	--	--	--	--

氏名

## 1. (不定積分の定義)

(1) 「関数  $F(x)$  が関数  $f(x)$  の原始関数である」とは  
 ということか、その定義を書け.

(2) 関数  $f(x)$  の不定積分を  $\int f(x) dx$  で表す.  
 $\int f(x) dx$  を定義する式を完成せよ.

$$\int f(x) dx = F(x) + C \Leftrightarrow \frac{d}{dx} \boxed{\phantom{x}} = \boxed{\phantom{x}}$$

以後、積分定数  $C$  を省略する.

## 2. (主な関数の不定積分)

(1)  $a$  を 0 でない定数とするとき、

$$\frac{d}{dx} x^a = \boxed{\phantom{x}}$$

だから

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{1}{a} x^a \right) = \boxed{\phantom{x}}$$

だから

$$\int x^{a-1} dx = \boxed{\phantom{x}}$$

ここで  $\alpha = a - 1$  とおくと、 $\alpha \neq -1$  であるとき

$$\int x^\alpha dx = \boxed{\phantom{x}}. \quad (\alpha \text{ で表せ})$$

$\alpha = -1$  であるときは次を使う.

$$(2) \frac{d}{dx} \log |x| = \boxed{\phantom{x}}$$

だから

$$\int \frac{1}{x} dx = \boxed{\phantom{x}}.$$

$$(3) \frac{d}{dx} e^x = \boxed{\phantom{x}}$$

だから

$$\int e^x dx = \boxed{\phantom{x}}.$$

$$(4) \frac{d}{dx} \sin x = \boxed{\phantom{x}}$$

だから

$$\int \cos x dx = \boxed{\phantom{x}}. \quad \sin \frac{x^2}{2} \text{ は誤り.}$$

$$(5) \frac{d}{dx} \cos x = \boxed{\phantom{x}}$$

だから

$$\int \sin x dx = \boxed{\phantom{x}}.$$

## 3. (不定積分の性質)

$$(1) \int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

$$(2) \int k f(x) dx = k \int f(x) dx$$

ただし、これが正しいのは  $k$  が定数のときであり、  
 $\int x f(x) dx = x \int f(x) dx$  は誤り.

## 4. (べき関数の不定積分)

(1) 空欄に適する式を書け.

$x^{-1}$	$x^{-\frac{1}{2}}$	$x^0$	$x^{\frac{1}{2}}$	$x^1$
$\frac{1}{x}$	$\boxed{\phantom{x}}$	$\boxed{\phantom{x}}$	$\sqrt{x}$	$\boxed{\phantom{x}}$
→	→	→	→	→
	$\boxed{\phantom{x}}$ 倍	$\boxed{\phantom{x}}$ 倍	$\boxed{\phantom{x}}$ 倍	$\boxed{\phantom{x}}$ 倍

(2)  $\frac{1}{\sqrt{x}} = x^{\boxed{\phantom{x}}}$  だから

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

(3)  $\sqrt{x} = x^{\boxed{\phantom{x}}}$  だから

$$\int \sqrt{x} dx$$

(4)  $\frac{1}{x^2} = x^{\boxed{\phantom{x}}}$  だから

$$\int \frac{1}{x^2} dx$$

$$(5) \int \left( 3x - 2 - \frac{2}{\sqrt{x}} \right) dx$$

5. (置換積分法)

$$\int (x \text{ の関数}) dx \text{ を}$$

(手順1)  $x = \varphi(t)$  または  $\psi(x) = t$  とおくことにより  $x$  の関数を  $t$  の関数に変形する.

(手順2) (手順1) の関係式を微分して  $dx = \square dt$

の形の関係式を得て,  $dx$  を  $\square dt$  で置きかえる.

このことにより,  $\int (t \text{ の関数}) dt$  に変形することができて積分が計算できることがある. この方法を置換積分法という.

(1)  $3x + 1 = t \cdots (*)$  とおくと

$$(3x + 1)^4 = \square$$

(\*) の両辺を  $x$  で微分すると

$$\frac{dt}{dx} = \square$$

だから  $dx = \square dt$ . これらを使って

$$\int (3x + 1)^4 dx =$$

(2) (1) と同じ変数変換で

$$\int \sqrt{3x + 1} dx =$$

(3) (1) と同じ変数変換で

$$\int \frac{1}{3x + 1} dx =$$

(4) (1) と同じ変数変換で

$$\int e^{3x+1} dx =$$

(5)

$$\int \sin\left(3x + \frac{\pi}{2}\right) dx =$$

$$\cos\left(\frac{3x^2}{2} + \frac{\pi x}{2}\right) \text{ は誤り.}$$

(6)  $x^2 + 1 = t \cdots (*)$  とおくと

$$(x^2 + 1)^4 = \square$$

(\*) の両辺を  $x$  で微分すると

$$\frac{dt}{dx} = \square$$

だから  $dx = \square dt$ . これらを使って

$$\int (x^2 + 1)^4 x dx =$$

(7)  $x = \tan t \left(-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}\right) \cdots (*)$  とおくと

$$1 + x^2 = \square \quad (t \text{ で表せ})$$

(\*) の両辺を  $t$  で微分すると

$$\frac{dx}{dt} = \square$$

だから  $dx = \square dt$ . これらを使って

$$\int \frac{1}{1 + x^2} dx = (t \text{ で表してよい})$$

(8)  $x = \sin t \left( -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2} \right) \cdots (*)$  とおくと

$$\sqrt{1-x^2} = \boxed{\phantom{000}}$$

(\*) の両辺を  $t$  で微分すると

$$\frac{dx}{dt} = \boxed{\phantom{000}}$$

だから  $dx = \boxed{\phantom{000}} dt$ . これらを使って

$$\int \sqrt{1-x^2} dx = (t \text{ で表してよい})$$

### 6. (部分積分法)

$f(x), g(x), f'(x), g'(x)$  が連続の時,

$$\int f'(x)g(x) dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x) dx$$

が成り立つ.

(1)  $\int x \sin x dx$  を計算しよう.  $f'(x) = \sin x, g(x) = x$  と見ると,

$$f(x) = \int \sin x dx = -\cos x, g'(x) = 1$$

だから,

$$\int x \sin x dx =$$

$$(2) \int x e^{-x} dx$$

### 7. (定積分) (1) 関数 $f(x)$ の原始関数 $F(x)$ と, 定積分

$\int_a^b f(x) dx$  の関係を書け.

(2)  $F(x) = \int_a^x f(t) dt$  とおくとき  $F(x)$  と  $f(x)$  の関係を書け.

### 8. (定積分の置換積分法)

$$\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b \Rightarrow \int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t) dt \quad (1)$$

(定積分の置換積分法)

$$\int_a^b f'(x)g(x) dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x) dx$$

$$(1) \int_0^4 \sqrt{2x+1} dx$$

$$(2) \int_0^\pi \sin(3x) dx$$

$$(3) \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx$$

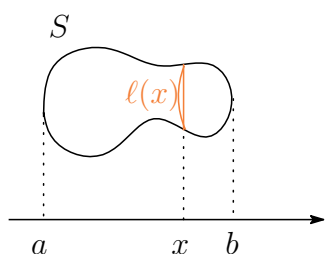
### 8. (広義積分) (1) $\int_0^1 \frac{1}{2x} dx$

$$(2) \int_0^\infty e^{-2x} dx$$

$$(3) \int_0^{\infty} x e^{-2x} dx$$

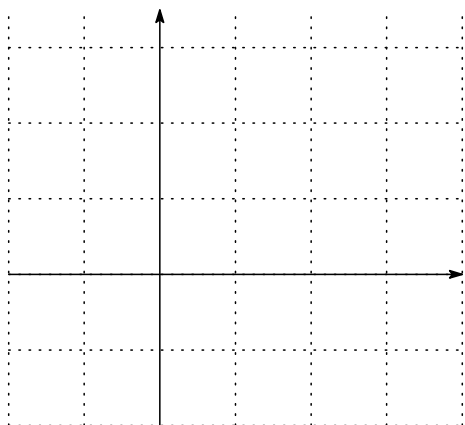
$$(4) \int_0^{\infty} \frac{1}{x^2 + 1} dx$$

9. (面積・体積) (1)

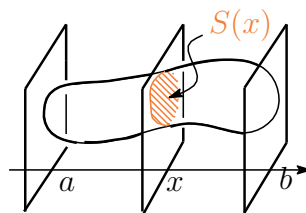


図のような図形を、点  $(x, 0)$  を通り  $x$  軸に垂直な直線で切った切り口の長さを  $l(x)$  とする。このとき図形の面積  $S$  を  $l(x)$  で表せ。

(2) 関数  $y = x^2 - 2x$ ,  $y = -\frac{1}{2}x + 1$  のグラフの概形をかき、囲まれる部分の面積を計算せよ。



(3)



図のような立体図形の体積を  $V$ , 点  $(x, 0, 0)$  を通り  $x$  軸に垂直な平面で切った切り口の面積を  $S(x)$  とするとき  $V$  を  $S(x)$  で表せ。

(4)  $y = \sqrt{2x}$  のグラフ,  $x = 0$ ,  $x = 1$  と  $x$  軸で囲まれる図形を  $x$  軸の周りで 1 回転してできる図形の体積を求めよ。