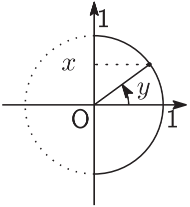
本日やること

1. 積分法
   - 逆三角関数 (その 2)
   - 二次無理関数の有理関数

積分法

逆三角関数 (その 2)

逆三角関数 $\sin^{-1}$ の定義



$$y = \sin^{-1} x, \quad (-1 \leqq x \leqq 1)$$

であることを

$$x = \sin y, \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leqq y \leqq \frac{\pi}{2}\right)$$

でさだめる。

積分法

逆三角関数 (その 2)

逆三角関数 $\sin^{-1}$ の導関数

a を正の定数とするとき

$$\frac{d}{dx}\left(\sin^{-1}\frac{x}{a}\right) = \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} \qquad \left(-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}\right)$$

積分法

二次無理関数の有理関数の積分

二次無理関数の有理関数の積分

$R(X, Y)$ を X, Y の有理関数とするとき，$\displaystyle\int R(x, \sqrt{x\ \text{の二次関数}})\, dx$ は初等関数になる。

証明は省略する。重要な例を説明しよう。

積分法

二次無理関数の有理関数の積分

[例]　a が正の定数のとき

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a}.$$

を示す

$x = a\sin t,\quad \left(-\frac{\pi}{2} \leqq t \leqq \frac{\pi}{2}\right)$ とおくと，この区間では $\cos t \geqq 0$ であり

$$\sqrt{a^2 - x^2} = a\sqrt{1 - \sin^2 t} = a\cos t, \qquad \frac{dx}{dt} = a\cos t \;\text{ より }\; dx = a\cos t\, dt$$

であるから

$$\begin{aligned}\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx &= \int a^2\, \cos^2 t\, dt = a^2 \int \frac{\cos 2t + 1}{2}\, dt \\ &= a^2\left(\frac{\sin 2t}{4} + \frac{t}{2}\right) = a^2\left(\frac{\sin t\cos t}{2} + \frac{t}{2}\right).\end{aligned}$$

積分法

二次無理関数の有理関数の積分

ところで

$$\sin t = \frac{x}{a},\ \cos t = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2},\ t = \sin^{-1}\frac{x}{a}$$

であるから

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a}.$$

積分法

二次無理関数の有理関数の積分

[例]

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \log(x+\sqrt{x^2+1})$$

を示す．

$x = \tan t, \quad \left(-\dfrac{\pi}{2} < t < \dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと，この区間では $\cos t > 0$ であり

$$\sqrt{1+x^2} = \sqrt{1+\tan^2 t} = \frac{1}{\cos t}, \qquad \frac{dx}{dt} = \frac{1}{\cos^2 t} \text{ より } dx = \frac{dt}{\cos^2 t}$$

であるから

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \int \frac{1}{\cos t}\,dt = \int \frac{\cos t}{1-\sin^2 t}\,dt$$

積分法

二次無理関数の有理関数の積分

$s = \sin t$ とおくと $ds = \cos t dt$ だから

$$= \int \frac{ds}{1 - s^2} = -\frac{1}{2} \log |s - 1| + \frac{1}{2} \log |s + 1| = \frac{1}{2} \log \left| \frac{\sin t + 1}{\sin t - 1} \right|$$

$\sin t = \dfrac{\tan t}{\sqrt{1 + \tan^2 t}} = \dfrac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$ だから

$$= \frac{1}{2} \log \left| \frac{x + \sqrt{1 + x^2}}{x - \sqrt{1 + x^2}} \right| = \log(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

積分法

二次無理関数の有理関数の積分

[別解] $x = \dfrac{e^t - e^{-t}}{2}$ とおくと

$$x^2 + 1 = \frac{e^{2t} - 2 + e^{-2t}}{4} + 1 = \frac{e^{2t} + 2 + e^{-2t}}{4} = \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2}\right)^2,$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{e^t + e^{-t}}{2} \text{ だから } dx = \frac{e^t + e^{-t}}{2} dt$$

だから

$$\int \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}\, dx = \int \frac{1}{\frac{e^t + e^{-t}}{2}} \frac{e^t + e^{-t}}{2}\, dt = \int dt = t$$

ところで

$$x = \frac{e^t - e^{-t}}{2} \text{ を } t \text{ について解くと } t = \log(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

積分法

二次無理関数の有理関数の積分

だから

$$= \log(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

となる。

$y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ を双曲線正弦関数といい $\sinh x$ で表す。