本日やること

1. 積分法
   - 三角関数の有理関数の積分法

積分法

復習：いろいろな初等関数の原始関数

初等関数の導関数は初等関数である。

初等関数の原始関数は初等関数とは限らない。

[原始関数が初等関数となる関数の例]

有理関数：$F(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, $(P(x), Q(x)$ は x の多項式) $\longrightarrow$ 第 5 回でやった。

三角関数の有理関数：$\dfrac{1}{\sin x + \cos x + 1}$ など。$\longrightarrow$ 本日やる。

積分法

三角関数の有理関数の積分法

[例] $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$ を使う。

$$\int \sin^2 x \, dx$$

[例] $\sin^3 x = (1-\cos^2 x)\sin x$ を使う。

$$\int \sin^3 x \, dx$$

積分法

三角関数の有理関数の積分法

$R(X,Y)$：X,Y の有理関数　$\Rightarrow$　$\displaystyle\int R(\cos x, \sin x)\,dx$ は初等関数になる。

なぜなら

三角関数の有理関数の積分法

$$\tan\frac{x}{2} = t \qquad (-\pi < x < \pi)$$

によって積分変数を x から t に変換すると

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$ だから

$$\int R(\cos x, \sin x)\,dx = \int R\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2}$$

のように t の有理関数の積分に帰着されるからである。

積分法

三角関数の有理関数の積分法

[確かめ]　$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ の両辺を $\cos^2\theta$ で割って　$1 + \tan^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$

2 倍角の公式により

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\tan\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2} = 2\tan\frac{x}{2}\frac{1}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos x = 2\cos^2\frac{x}{2} - 1 = \frac{2}{1+\tan^2\frac{x}{2}} - 1 = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

また

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{2}\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}\left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right) = \frac{1+t^2}{2}$$

より

$$dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

積分法

三角関数の有理関数の積分法

[例]

$$\int \frac{dx}{1+\cos x+\sin x} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{1+\frac{1-t^2}{1+t^2}+\frac{2t}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{1+t}$$

$$= \log|1+t| = \log\left|1+\tan\frac{x}{2}\right|$$