本日やること

1. 積分法
   - 原始関数と不定積分

積分法

初めに

[積分とは何か]

微分と逆の演算

$$\begin{tikzcd} F(x) \arrow[r, bend left, "微分"] & f(x) \arrow[l, bend left, "積分"] \end{tikzcd}$$

[目的]

1. 微分方程式を解くこと。(不定積分)
2. 面積・体積・質量の計算。　道のりの計算 (定積分)

(逆に　密度の計算　速度の計算は微分法であった　)

積分法

原始関数

原始関数の定義

$F(x)$ が $f(x)$ の原始関数 $\iff$ $\dfrac{d}{dx}F(x) = f(x)$

[例]

$$\frac{d}{dx}x^3 = 3x^2, \quad \frac{d}{dx}(x^3+1) = 3x^2, \quad \frac{d}{dx}(x^3-5) = 3x^2, \ldots$$

であるから x^3, x^3+1, $x^3-5, \ldots$ は $3\,x^2$ の原始関数である.

積分法

原始関数はどれだけあるか

$f(x)$ の 原始関数の 1 つを $F(x)$ で表すと, そのほかの原始関数 $G(x)$ は適当な定数 C を用いて $F(x)+C$ で表される.

[確かめ]

$$(F(x)-G(x))'=F'(x)-G'(x)=f(x)-f(x)=0$$

であるが,

「ある区間で導関数の値が常に 0 $\Leftrightarrow$ 関数は定数関数」(定理 5.9)

だから $F(x)-G(x)$ は定数関数となる.

積分法
不定積分

不定積分の定義

$f(x)$ の 原始関数の 1 つを $F(x)$ とし, C を任意の定数とするとき, $F(x)+C$ を $f(x)$ の不定積分とよび

$$\int f(x)\,dx$$

で表す。定数 C を積分定数という. 不定積分を求めることを $f(x)$ を積分するという.

まとめると

微分と不定積分の関係

$$\frac{d}{dx}F(x) = f(x) \iff \int f(x)\,dx = F(x) + C$$

無数の原始関数を象徴的に 1 つの式で表したものと思ってほしい。

積分法

主な関数の不定積分

(i) $\displaystyle \int x^{\alpha}\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \qquad (\alpha \neq -1)$

(ii) $\displaystyle \int x^{-1}\,dx = \int \frac{dx}{x} = \log|x| + C$

(iii) $\displaystyle \int e^{x}\,dx = e^{x} + C$

(iv) $\displaystyle \int \sin x\,dx = -\cos x + C = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + C$

(v) $\displaystyle \int \cos x\,dx = \sin x + C = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + C$

今後積分定数 C は省略することにする.

積分法

主な関数の不定積分

$$\frac{d}{dx}x^2 = 2x$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dx}x^2 = x$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{d}{dx}\frac{x^2}{2} = x \qquad \Leftrightarrow d\left(\frac{x^2}{2}\right) = x\,dx$$

$$\Updownarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$\frac{x^2}{2} + C = \int x\,dx \qquad \Leftrightarrow \int d\left(\frac{x^2}{2}\right) = \int x\,dx$$

積分法

主な関数の不定積分

[(i) の確かめ]　$a \neq 0$ とする。

$$\frac{d}{dx}x^a = ax^{a-1}$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{1}{a}\frac{d}{dx}x^{a-1} = x^{a-1}$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{d}{dx}\frac{x^a}{a} = x^{a-1}$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{x^a}{a} + C = \int x^{a-1}\,dx$$

$a - 1 = \alpha$ とおくと $a = \alpha + 1$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C = \int x^{\alpha}\,dx$$

ただし $\alpha \neq -1$

積分法

主な関数の不定積分

[(ii) の確かめ] $\alpha = -1$ のときは $x^{-1} = \dfrac{1}{x}$ であるが特別あつかい。

$$\frac{d}{dx}\log|x| = \frac{1}{x} \quad \Leftrightarrow \quad \log|x| + C = \int \frac{1}{x}\,dx$$

[(iv) の確かめ]

$$\frac{d}{dx}\sin x = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{d}{dx}\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin x \quad \Leftrightarrow \quad \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + C = \int \sin x\,dx$$

積分法

不定積分の性質：線形性

不定積分の性質：線形性

(i) $\displaystyle \int (f(x) + g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$

(ii) $\displaystyle \int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$ （k は定数）

積分法

不定積分の性質：線形性

[(i) の確かめ]

$$
\begin{array}{lcl}
\displaystyle\int f(x)\,dx = F(x) + C_1 \text{とおく} & \Rightarrow & \dfrac{d}{dx}F(x) = f(x) \\
\displaystyle\int g(x)\,dx = G(x) + C_2 \text{とおく} & \Rightarrow & \dfrac{d}{dx}G(x) = g(x) \\
 & & \quad\Downarrow \\
 & & \dfrac{d}{dx}F(x) + \dfrac{d}{dx}G(x) = f(x) + g(x) \\
 & & \qquad\quad\| \\
\displaystyle\int (f(x) + g(x))\,dx & \Leftarrow & \dfrac{d}{dx}\left(F(x) + G(x)\right) = f(x) + g(x) \\
\qquad = F(x) + G(x) + C_3 & &
\end{array}
$$