

本日やること

- ① 微分法
 - 高階導関数

- ② 微分法の応用
 - 近似多項式

微分法

主な関数の高階導関数

べき関数の高階導関数

$f(x) = x^\alpha$, (α は実数の定数) のとき

$$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$$

$$f''(x) = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$$

$$f'''(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)x^{\alpha-3}$$

\vdots

$$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)x^{(\alpha-n)}$$

例えば $f(x) = x^4$ のとき

$$f'(x) = 4x^3, \quad f''(x) = 4 \cdot 3x^2, \quad f'''(x) = 4 \cdot 3 \cdot 2x, \quad f^{(4)}(x) = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4!$$

微分法

主な関数の高階導関数

指数関数・対数関数の高階導関数

(i) $f(x) = e^x$ のとき

$$f^{(n)}(x) = e^x, \quad (n = 1, 2, \dots)$$

(ii) $f(x) = \log x$ ($x > 0$) のとき

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} (n-1)! x^{-n}$$

(i) は $(e^x)' = e^x$ だから。 (ii) は

$$(\log x)' = \frac{1}{x} = x^{-1}$$

$$(\log x)'' = (x^{-1})' = (-1)x^{-2}$$

$$(\log x)''' = ((-1)x^{-2})' = (-1)(-2)x^{-3}$$

⋮

だから

微分法

主な関数の高階導関数

三角関数の高階導関数

$$f(x) = \sin x \text{ のとき } f^{(n)}(x) = \sin \left(x + \frac{n\pi}{2} \right),$$

$$f(x) = \cos x \text{ のとき } f^{(n)}(x) = \cos \left(x + \frac{n\pi}{2} \right), \quad (n = 1, 2, \dots)$$

$f(x) = \sin x$ のとき

$$f'(x) = \cos x = \sin \left(x + \frac{\pi}{2} \right) = \sin t \quad \left(x + \frac{\pi}{2} = t \text{ とおいた} \right)$$

$$f''(x) = \frac{d}{dx} \sin t = \frac{d}{dt} \sin t \frac{dt}{dx} = \sin \left(t + \frac{\pi}{2} \right) \times 1 = \sin \left(x + \frac{2\pi}{2} \right)$$

⋮

これをくりかえす。 $\cos x$ のときも同様。

微分法の応用

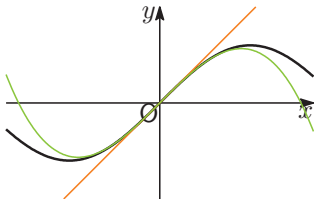
近似多項式

[目標] 関数 $y = f(x)$ を $x = 0$ の近くで x の多項式

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots \quad (a_0, a_1, a_2, \cdots \text{ は定数})$$

で近似したい。そのため高階微分係数を利用する。

[例 : $\sin x$ の近似多項式]



$x \doteq 0$ のとき $\sin x \doteq 0$ (0次近似)

$x \doteq 0$ のとき $\sin x \doteq x$ (1次近似)

$x \doteq 0$ のとき $\sin x \doteq x - \frac{x^3}{6}$ (3次近似)

微分法の応用

近似多項式

準備：多項式の係数

x の n 次多項式

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n \quad (a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n \text{ は定数})$$

に対して

$$a_k = \frac{P^{(k)}(0)}{k!}, \quad k = 1, 2, \cdots, n$$

が成り立つ。

微分法の応用

近似多項式

[確かめ]

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_nx^n$$

$$P'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots + na_nx^{n-1}$$

$$P''(x) = 2 \cdot 1a_2 + 3 \cdot 2a_3x + \cdots + n(n-1)a_nx^{n-2}$$

$$P'''(x) = 3 \cdot 2 \cdot 1a_3 + \cdots + n(n-1)(n-2)a_nx^{n-3}$$

$$\vdots$$
$$\vdots$$

$$P^{(n)}(x) = n!a_n$$

だから $x = 0$ を代入すると

$$P(0) = a_0, \quad P'(0) = a_1, \quad P''(0) = 2!a_2, \quad P'''(0) = 3!a_3, \cdots \quad P^{(n)}(0) = n!a_n$$

微分法の応用

近似多項式

Maclaurin 近似多項式の定義

関数 $f(x)$ が n 回微分可能であるとき、 x の n 次多項式

$$P(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \cdots (A)$$

を $f(x)$ の n 次 Maclaurin 近似多項式という。

(A) は

$$P(0) = f(0), P'(0) = f'(0), P''(0) = f''(0), \cdots, P^{(n)}(0) = f^{(n)}(0) \cdots (B)$$

を満たすただ一つの n 次多項式である。

(B) により

$$x \doteq 0 \Rightarrow f(x) \doteq P(x) \cdots (C)$$

であることが予想されるが、実際次が成り立つ。

微分法の応用

近似多項式

Macraulin の定理

$f(x)$: 区間 (a, b) ($a < 0 < b$) で $n + 1$ 回微分可能,
 $P(x)$: $f(x)$ の n 次 Maclaurin 近似多項式,
とするととき, 近似の誤差を

$$R_{n+1}(x) = f(x) - P(x), \quad a < x < b$$

で定めると,

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1}$$

と表される. ここで θ ($0 < \theta < 1$) は x と n で決まる適当な実数。

f が $n + 1$ 回連続微分可能ならば $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{R_{n+1}(x)}{x^n} = 0$ となり $R_{n+1}(x)$ は非常に小さい誤差であるといえる。

微分法の応用

近似多項式

Taylor 近似多項式

関数 $f(x)$ が n 回微分可能とし、 a を定義域内の点とするととき x の n 次多項式

$$P(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \cdots (A)$$

を $f(x)$ の $x = a$ における n 次 Taylor 近似多項式という。

(A) は

$$P(a) = f(a), P'(a) = f'(a), P''(a) = f''(a), \cdots, P^{(n)}(a) = f^{(n)}(a) \cdots (B)$$

を満たすただ一つの n 次多項式である。

(B) により

$$x \doteq a \Rightarrow f(x) \doteq P(x) \cdots (C)$$

であることが予想されるが、実際次が成り立つ。

微分法の応用

近似多項式

Taylor の定理

$f(x)$: a を含む開区間で $n + 1$ 回微分可能,
 $P(x)$: $f(x)$ の $x = a$ における n 次 Taylor 近似多項式,
とするととき, 近似の誤差を

$$R_{n+1}(x) = f(x) - P(x), \quad a < x < b$$

で定めると,

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(a + \theta(x - a))}{(n + 1)!} (x - a)^{n+1}$$

と表される. ここで θ ($0 < \theta < 1$) は x と n で決まる適当な実数.

微分法の応用

近似多項式

e^x の Maclaurin 近似多項式

$f(x) = e^x$ の n 次の Maclaurin 近似多項式は

$$P_n(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n, \quad (n = 1, 2, \dots)$$

である。

[確かめ] $f(x) = e^x$ とおくと,

$$f^{(k)}(x) = e^x, \quad \text{だから } f^{(k)}(0) = 1, \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

これを (A) に代入すればよい。

微分法の応用

近似多項式

$\sin x$ の Maclaurin 近似多項式

$f(x) = \sin x$ の n 次の Maclaurin 近似多項式は $n = 2k - 1$ または $2k$ のとき

$$P_n(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \cdots + \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!}x^{2k-1}$$

である。

[確かめ] $f(x) = \sin x$ とおくと, $f^{(k)}(x) = \sin\left(x + \frac{k\pi}{2}\right)$, だから

$$f^{(k)}(0) = \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0, & k \text{ は偶数} \\ 1, & k = 1, 5, 9, \dots \\ -1, & k = 3, 7, 11, \dots \end{cases}$$

これを (A) に代入すればよい。

微分法の応用

近似多項式

$\log(1+x)$ の Maclaurin 近似多項式

$f(x) = \log(1+x)$ の n 次の Maclaurin 近似多項式は

$$P_n(x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n$$

である。