

## 電気のための微分積分B 小テスト (3) 解答

1. 次の積分を計算せよ。計算の過程を詳しく書くこと。

$$(1) \int \frac{dx}{\sqrt{2x-1}}$$

$$2x-1=t \text{ とおくと } \frac{dt}{dx} = 2 \text{ だから } dx = \frac{dt}{2}。$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x-1}} = \int \frac{1}{\sqrt{t}} \frac{dt}{2} = \frac{1}{2} \int t^{-\frac{1}{2}} dt = \frac{1}{2} \frac{t^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} = t^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2x-1}$$

$$(2) \int \frac{x}{\sqrt{2x-1}} dx$$

$$[\text{解法 1}] \quad 2x-1=t \text{ とおくと } x = \frac{1}{2}(t+1), \text{ また } \frac{dt}{dx} = 2 \text{ だから } dx = \frac{dt}{2}。$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{2x-1}} dx = \int \frac{\frac{1}{2}(t+1)}{\sqrt{t}} \frac{dt}{2} = \int \frac{1}{4}\sqrt{t} + \frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{t}} dt = \frac{1}{6}t^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}t^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{6}(2x-1)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}(2x-1)^{\frac{1}{2}}$$

$$[\text{解法 2}] \quad (1) \text{ より } \frac{1}{\sqrt{2x-1}} = (\sqrt{2x-1})' \text{ だから部分積分法により}$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{2x-1}} dx = \int x (\sqrt{2x-1})' dx = x (\sqrt{2x-1}) - \int \sqrt{2x-1} dx = x\sqrt{2x-1} - \frac{1}{3}(2x-1)^{\frac{3}{2}}。$$

$$(3) \int e^{-x} dx$$

一般に0でない定数  $a$  に対して

$$(e^{ax})' = ae^{ax}, \quad \int e^{ax} dx = \frac{1}{a}e^{ax}$$

だから

$$\int e^{-x} dx = -e^{-x}.$$

$$(4) \int x e^{-x} dx$$

(3) より  $e^{-x} = (-e^{-x})'$  だから部分積分法により

$$\int x e^{-x} dx = \int x (-e^{-x})' dx = x(-e^{-x}) - \int (-e^{-x})' dx = x(-e^{-x}) - e^{-x} = -(x+1)e^{-x}$$

$$(5) \int \frac{2x}{x^2-1} dx \quad (\text{Hint. } x^2-1=t \text{ とおく})$$

$$\int \frac{2x}{x^2-1} dx = \int \frac{1}{s} ds = \log |s| = \log |x^2-1|$$

$$(6) \int \frac{2}{x^2-1} dx \quad (\text{Hint. 部分分数分解 } \frac{2}{x^2-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1})$$

$A=1, B=-1$  だから

$$\int \frac{2}{x^2-1} dx = \int \left( \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right) dx = -\log |x-1| + \log |x+1|$$