□ は基本事項集の問題番号.

電気のための微分積分B　小テスト(2)　解説

(1) $$\int \left(3x+3\sqrt{x}-\frac{3}{x}\right)dx \underset{\boxed{3}より}{=} 3\underbrace{\int x\,dx}_{=\frac{x^2}{2}\ \boxed{2(1)}} + 3\underbrace{\int \sqrt{x}\,dx}_{=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\ \boxed{4(3)}} - 3\underbrace{\int \frac{dx}{x}}_{=\log|x|\ \boxed{4(2)}}$$

2 訂正

$$= \frac{3}{2}x^2 + \cancel{\frac{1}{3}}\,x^{\frac{3}{2}} - 3\log|x|$$

$\log|3x|$ は誤り!

(2) $$\int \sin(3x+2)\,dx.$$

$\boxed{3x+2=t}$ とおく。両辺 x で微分すると

$3=\dfrac{dt}{dx}$。両辺に $\dfrac{dx}{3}$ をかけて $\boxed{dx=\dfrac{dt}{3}}$

これらより おきかえを行なうと

$$\int \sin\boxed{(3x+2)}\,\boxed{dx} = \int \sin\boxed{t}\,\boxed{\frac{dt}{3}} = \frac{1}{3}\int \sin t\,dt.$$

$\boxed{2(5)}$ より

$$= \frac{1}{3}\left(-\cos t\right) = -\frac{1}{3}\cos(3x+2) \ /\!/$$

カッコを必ず書くこと!

(5) $\boxed{6}$ をつかう

$$\int e^{2x}dx = \int e^t \frac{dt}{2} \overset{\boxed{2(3)}}{=} \frac{1}{2}e^t = \frac{1}{2}e^{2x}$$

$2x = t$ とおくと $dx = \frac{dt}{2}$

だから $e^{2x} = \left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)'$

したがって

$$\int x e^{2x} dx$$

$$= \int \underset{g}{x} \underset{f'}{\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)'} dx \overset{\boxed{6}}{=} \underset{g}{x} \times \underset{f}{\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)} - \int \underset{g'}{(x)'} \underset{f}{\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)} dx$$

$$= \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{2}\int e^{2x} dx$$

$$= \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x}$$ //

(3) (1)と同じ変数変換で

$$\int \sqrt{3x+2}\,dx = \int \sqrt{t}\,\frac{dt}{3} = \frac{1}{3}\int \sqrt{t}\,dt$$

$$\underset{\boxed{4(3)}}{=} \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{9}(3x+2)^{\frac{3}{2}} \quad //$$

(4) $\int x\sqrt{x^2+1}\,dx$

$\boxed{x^2+1=t}$とおく。両辺 x で微分して $2x=\dfrac{dt}{dx}$.

両辺に $\dfrac{dx}{2x}$ をかけて $\boxed{dx=\dfrac{dt}{2x}}$.

これによりおきかえを行なうと

$$\int x\sqrt{x^2+1}\,dx = \int \cancel{x}\sqrt{t}\,\frac{dt}{2\cancel{x}} = \frac{1}{2}\int\sqrt{t}\,dt$$

xで約分

$$\underset{\boxed{4(3)}}{=} \frac{1}{2}\,\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}} \quad //$$

別解) $\sqrt{x^2+1}=t$ とおくと $\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{2x}{\sqrt{x^2+1}}=\dfrac{2x}{t}$ だから $x\,dx=\dfrac{t\,dt}{2}$

おきかえると

$$\int x\sqrt{x^2+1}\,dx = \int t^2\frac{dt}{2} = \frac{1}{3}t^3 = \frac{1}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}}$$ も可.

(6) $\int x\sqrt{x-1}\,dx$.

(方法1). $\boxed{x-1=t}$ とおく. 両辺 x で微分すると,

$1=\dfrac{dt}{dx}$ だから $\boxed{dx=dt}$, また $\boxed{x=t+1}$.

これで おきかえると

$$\int \boxed{x}\sqrt{\boxed{x-1}}\,\boxed{dx} = \int \boxed{(t+1)}\sqrt{\boxed{t}}\,\boxed{dt}$$

$$= \int\left(t\sqrt{t}+\sqrt{t}\right)dt = \underbrace{\int t^{\frac{3}{2}}\,dt}_{=\frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}}} + \underbrace{\int \sqrt{t}\,dt}_{=\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}}$$

$\boxed{2.(1)}$

$$= \frac{2}{5}(x-1)^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}} \quad // \quad (*)$$

(方法2). 部分積分 をつかう方法.

$\int\sqrt{x-1}\,dx = \frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}$ より $\sqrt{x-1} = \left(\frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}\right)'$ だから

$$\int x\sqrt{x-1}\,dx = \int x\left(\frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}\right)'dx$$

$$= x\cdot\left(\frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}\right) - \int (x)'\left(\frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}\right)dx$$

$$= \frac{2}{3}x(x-1)^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{15}(x-1)^{\frac{5}{2}} \quad //$$

((*)と一致する)