電気のための微分積分 B 第 6 回問題　解答

6.1.

$$\int \frac{dx}{3+5\sin x}$$

$\tan\dfrac{x}{2}=t$ とおくと

$\sin x=\dfrac{2t}{1+t^2},\quad dx=\dfrac{2dt}{1+t^2}$

となるので

$$\int \frac{dx}{3+5\sin x}=\int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{3+5\frac{2t}{1+t^2}}=\int \frac{2dt}{3t^2+10t+3}$$

ここで部分分数分解により

$$\frac{2}{3t^2+10t+3}=\frac{2}{3(t+3)\left(t+\frac{1}{3}\right)}=-\frac{1}{4}\frac{1}{t+3}+\frac{1}{4}\frac{1}{t+\frac{1}{3}}$$

がわかるから

$$\int \frac{dx}{3+5\sin x} = -\frac{1}{4}\int \frac{dt}{t+3}+\frac{1}{4}\int \frac{dt}{t+\frac{1}{3}} = \frac{1}{4}\log\left|\frac{t+\frac{1}{3}}{t+3}\right| =$$
$$\frac{1}{4}\log\left|\frac{\tan\frac{x}{2}+\frac{1}{3}}{\tan\frac{x}{2}+3}\right|$$

6.2. (1) $\tan x=t$ とおくと $\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x=\boxed{1+t^2}$ だから $dx=\boxed{\frac{1}{1+t^2}}dt$。

(2) $\dfrac{1}{(1+t)(1+t^2)}$ を部分分数分解しよう。ある定数 A, B, C があって

$$\frac{1}{(1+t)(1+t^2)}\equiv\frac{A}{1+t}+\frac{Bt+C}{1+t^2}\quad (t \text{ の恒等式})$$

となることが知られているが,

右辺$=\dfrac{A(1+t^2)+(Bt+C)(1+t)}{(1+t)(1+t^2)^2}=\dfrac{(A+B)t^2+(B+C)t+A+C}{(1+t)(1+t^2)^2}$

だから分子同士を比較して

$$1\equiv(A+B)t^2+(B+C)t+A+C$$

となっているはずである．左辺を $0t^2+0t+1$ と考えると

両辺の t^2 の係数が等しいから $A+B=0$

両辺の t の係数が等しいから $B+C=0$

両辺の 定数項が等しいから $A+C=1$

これを解いて

$A=C=\dfrac{1}{2}$, $B=-\dfrac{1}{2}$ がわかる．だから

$$\frac{1}{(1+t)(1+t^2)}=\frac{1}{2}\frac{1}{1+t}+\frac{1}{2}\frac{(-t+1)}{1+t^2}\quad (t\text{ の恒等式})$$

(3) $$\int\frac{\cos x dx}{\cos x+\sin x}=\int\frac{dx}{1+\tan x}=\int\frac{dt}{(1+t)(1+t^2)}$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{1+t}+\frac{1}{2}\int\frac{1-t}{1+t^2}\,dt$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{1+t}+\frac{1}{2}\int\frac{1}{1+t^2}\,dt-\frac{1}{2}\int\frac{t}{1+t^2}\,dt$$

ここで $1+t^2=s$ とおくと $t\,dt=\dfrac{ds}{2}$ だから第 4 回スライド 8 ページ を使うと

$$\int\frac{t}{1+t^2}\,dt=\frac{1}{2}\log|s|=\frac{1}{2}\log(1+t^2),$$

また演習問題 5.3 を使うと

$$\int\frac{1}{1+t^2}\,dt=\tan^{-1}t,$$

したがって

$$=\frac{1}{2}\log|1+t|+\frac{1}{2}\tan^{-1}t-\frac{1}{4}\log(1+t^2)=\frac{1}{2}\log\sqrt{\frac{(1+t)^2}{1+t^2}}+\frac{1}{2}\tan^{-1}t$$

$$=\frac{1}{2}\log|\sin x+\cos x|+\frac{x}{2}.$$