電気のための微分積分 B
第 5 回解答

以下, 積分定数 C は省略する.

5.1. (0) [準備] : $\displaystyle\int e^{-x}\,dx$ を計算する。

$-x = t$

とおく。両辺を x で微分して

$-1 = dtdx$

両辺に -1 をかけて

$dx = -dt$

したがって

$$\int e^{-x}dx = \int e^{t}(-dt) = -\int e^{t}dt = -e^{t} = -e^{-x}$$

(1) $\displaystyle\int xe^{-x}\,dx$

$f'(x) = e^{-x}$, $g(x) = x$ とみて部分積分法

$$\int f'(x)\,g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx$$

を使う.

まず $f'(x) = e^{-x}$ であることから (0) より

$$f(x) = \int f'(x)\,dx = \int e^{-x}\,dx = -e^{-x}$$

となる. 次に部分積分法を使って

$$\int xe^{-x}\,dx = (-e^{-x})\,x - \int (-e^{-x})\,(x)'\,dx$$
$$= -xe^{-x} + \int e^{-x}\,dx = -xe^{-x} - e^{-x}.$$

短く言うと

$$\int xe^{-x}\,dx = \int x\left(-e^{-x}\right)'\,dx = x\left(-e^{-x}\right) - \int (x)'\left(-e^{-x}\right)\,dx$$
$$= -xe^{-x} + \int e^{-x}\,dx = -xe^{-x} - e^{-x}.$$

としてもよい.

(2) $\displaystyle\int x^2 e^{-x}\,dx = \int x^2\left(-e^{-x}\right)'\,dx = x^2\left(-e^{-x}\right) - \int (x^2)'\left(-e^{-x}\right)\,dx$

$$= x^2\left(-e^{-x}\right) - \int 2x\left(-e^{-x}\right)\,dx$$

$$= x^2\left(-e^{-x}\right) + 2\int xe^{-x}\,dx$$

ここで (1) を使って

$$= x^2\left(-e^{-x}\right) + 2(-xe^{-x} - e^{-x})$$

$$= (-x^2 - 2x - 2)\left(e^{-x}\right).$$

(3) $\displaystyle\int x\sin x\,dx$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x$$

だから

$$(-\cos x)' = \sin x$$

であることがわかる. 次に部分積分法を使って

$$\int x\ \sin x\,dx = \int x\,(-\cos x)'\ dx$$

$$= x\,(-\cos x) - \int (x)'\,(-\cos x)\,dx$$

$$= -x\cos x + \sin x.$$

5.2. $\displaystyle S = \int e^x \sin x\,dx,\ \ C = \int e^x\cos x\,dx$ とおく。

(1) 部分積分により S を C で表せ。

$$S = \int e^x \sin x\,dx = \int e^x(-\cos x)'\,dx$$

$$= e^x(-\cos x) - \int (e^x)'(-\cos x)\,dx = -e^x\cos x + \int e^x\cos x\,dx$$

$$= -e^x\cos x + C.$$

(2) 部分積分により C を S で表せ。

$$C=\int e^x\cos x\,dx=\int e^x(\sin x)'\,dx$$
$$=e^x(\sin x)-\int(e^x)'(\sin x)\,dx=e^x\sin x-\int e^x\sin x\,dx$$
$$=e^x\sin x-S.$$

(3) S, C を x で表せ。

$$\begin{cases}S=-e^x\cos x+C,\\ C=e^x\sin x-S,\end{cases}$$

を解いて

$$S=\frac{1}{2}e^x(\sin x-\cos x),\quad C=\frac{1}{2}e^x(\sin x+\cos x).$$

5.3. (1) a を正の定数とする. $x=a\tan t$ によって積分変数を t に変換することにより $\displaystyle\int\frac{dx}{a^2+x^2}$ を計算せよ. (Hint. $\displaystyle\frac{1}{1+\tan^2 t}=\cos^2 t.$)

$x=a\tan t$ の両辺を t で微分して

$$\frac{dx}{dt}=\frac{a}{\cos^2 t}$$

$1+\tan^2 t=\dfrac{1}{\cos^2 t}$ (三平方の定理) に注意して

$$=a(1+\tan^2 t).$$

この両辺に dt をかけると

$$dx=a(1+\tan^2 t)dt.$$

従って x を $a\tan t$ で置き換えると dx を $a(1+\tan^2 t)\,dt$ で置き換えなくてはならないので

$$\int\frac{dx}{a^2+x^2}=\int\frac{a(1+\tan^2 t)\,dt}{a^2(1+\tan^2 t)}=\int\frac{dt}{a}=\frac{t}{a}$$

ここで逆三角関数を使うと $\dfrac{x}{a}=\tan t\ \Leftrightarrow\ t=\tan^{-1}\dfrac{x}{a}$ だから

$$=\frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}.$$

(2) $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{a}\tan^{-1}\dfrac{x}{a}\right)$ を計算せよ．

$\dfrac{x}{a}=t$ とおいて合成関数の微分法を使うと

$$\frac{d}{dx}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)=\frac{dt}{dx}\times\frac{d}{dt}\tan^{-1}t=\frac{1}{a}\times\frac{d}{dt}\tan^{-1}t\cdots(\star)$$

$y=\tan^{-1}t$ とおくと逆三角関数の定義により

$$y=\tan^{-1}t \iff t=\tan y,\quad \left(-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}\right)$$

だから

$$\frac{dt}{dy}=\frac{d}{dy}\tan y=\frac{1}{\cos^2 y}=1+\tan^2 y=1+t^2$$

逆関数の微分法により

$$\frac{dy}{dt}=\frac{1}{\frac{dt}{dy}}=\frac{1}{1+t^2}$$

だから

$$\frac{d}{dt}\tan^{-1}t=\frac{1}{1+t^2}$$

$(\star)$ と合わせて

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)=\frac{1}{a^2}\times\frac{1}{1+t^2}=\frac{1}{a^2}\times\frac{1}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}=\frac{1}{a^2+x^2}$$

5.4. (1) 次の式を部分分数に分解せよ．

$$\frac{x+8}{x^2+x-6}$$

分母を因数分解すると

$$x^2+x-6=(x-2)(x+3)$$

だからこの関数は

$$\frac{x+8}{x^2+x-6}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+3}\quad (A\ B\ は定数)$$

の形に変形される．これを部分分数分解という．この等式が x の恒等式になるように定数 A, B の値を決めよう．右辺を通分して足し算すると

$$\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+3}=\frac{A(x+3)}{(x-2)(x+3)}+\frac{B(x-2)}{(x-2)(x+3)}=\frac{A(x+3)+B(x-2)}{(x-2)(x+3)}$$

$$=\frac{(A+B)x+3A-2B}{(x-2)(x+3)}$$

だから分子どうし比較して

$$x+8=(A+B)x+3A-2B$$

であればよい.

x の係数どうしを比較して $A+B=1$

定数項どうし比較して $3A-2B=8$

この連立方程式を解くと $A=2,\ B=-1$ だから

$$\frac{x+8}{x^2+x-6}=\frac{2}{x-2}-\frac{1}{x+3}$$

(2) $\displaystyle\int \frac{x+8}{x^2+x-6}\,dx$ を計算せよ.

(1) により

$$\int \frac{x+8}{x^2+x-6}\,dx=\int \frac{2}{x-2}\,dx-\int \frac{1}{x+3}\,dx$$

$$=2\log|x-2|-\log|x+3|$$