電気のための微分積分 B 第 4 回解答

以下, 積分定数 C は省略する.

3.1.

(1) $\displaystyle\int (2x-3)^5\,dx$

$$2x-3=t \qquad (*)$$

とおき, この両辺を x で微分すると

$$2=\frac{dt}{dx}$$

となるが, この両辺に $\dfrac{dx}{2}$ を掛けると

$$dx=\frac{dt}{2} \qquad (**)$$

という等式が得られる. この $(**)$ から dx を $\dfrac{1}{2}\,dt$ に置き換えればよいことが分かる. このおきかえにより

$$\int (2x-3)^5\,dx=\int t^5\left(\frac{1}{2}dt\right)=\frac{1}{2}\int t^5\,dt=\frac{1}{12}\,t^6$$

$t=2x-3$ だから

$$=\frac{1}{12}(2x-3)^6.$$

(2) $2x-3=t$ と置いて合成関数の微分法により

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{12}(2x-3)^6\right)=\frac{dt}{dx}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{12}t^6\right)=2\frac{1}{12}6t^5=t^5=(2x-3)^5$$

これは (1) の検算である。

(3) $\displaystyle\int \cos(2x-3)\,dx$

(1) と同じ変換で

$$2x-3=t \qquad (*)$$

とおき,x で微分すると

$$2=\frac{dt}{dx}$$

となるが, 両辺に $\dfrac{dx}{2}$ を掛けると

$$dx = \frac{dt}{2} \qquad (**)$$

という等式が得られる．これらにより $2x-3$, dx をおきかえると,

$$\int \cos(2x-3)\,dx = \int \cos t \left(\frac{1}{2}dt\right) = \frac{1}{2}\sin t$$

$t = 2x-3$ だから

$$= \frac{1}{2}\sin(2x-3)$$

(4) $2x-3=t$ と置いて合成関数の微分法により

$\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{2}\sin(2x-3)\right) = \dfrac{dt}{dx}\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{1}{2}\sin t\right) = 2\cdot\dfrac{1}{2}\cos t = \cos t = \cos(2x-3)$

これは (3) の検算である。

(5) $\displaystyle\int e^{2x-3}\,dx$

(1) と同じ変換で $2x-3$, dx をおきかえると,

$$\int e^{2x-3}\,dx = \int e^t \left(\frac{1}{2}dt\right) = \frac{1}{2}e^t$$

$t = 2x-3$ だから

$$= \frac{1}{2}e^{2x-3}$$

(6) $2x-3=t$ と置いて合成関数の微分法により

$\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{2}e^{2x-3}\right) = \dfrac{dt}{dx}\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{1}{2}e^t\right) = 2\cdot\dfrac{1}{2}e^t = e^t = e^{2x-3}$

これは (5) の検算である。

4.2. (1) $\displaystyle\int \sqrt{x}\,dx$

$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ である．べき関数の積分法 $\displaystyle\int x^\alpha\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ において $\alpha = \dfrac{1}{2}$ とすると

$$\int \sqrt{x}\,dx = \int x^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$$

(2) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$

$x^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ である．べき関数の積分法 $\displaystyle\int x^{\alpha}\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ において

$\alpha = -\dfrac{1}{2}$ とすると

$$\int \sqrt{x}\,dx = \int x^{-\frac{1}{2}}\,dx = \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = 2x^{\frac{1}{2}}$$

$$= 2\sqrt{x}$$

(3) $\displaystyle\int \sqrt{2x-3}\,dx$ を計算しよう．$2x-3=t$ とおくと $\dfrac{dt}{dx}=2$ だから $dx = \dfrac{1}{2}dt$. したがって 置換積分法を使って

$$\int \sqrt{2x-3}\,dx = \int \sqrt{t}\frac{1}{2}\,dt$$

(1) により

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}t^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}(2x-3)^{\frac{3}{2}}$$

(4) $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{3}(2x-3)^{\frac{3}{2}}\right)$

$2x-3=t$ とおいて合成関数の微分法を使う。

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3}(2x-3)^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{3}t^{\frac{3}{2}}\right)\times\frac{dt}{dx} = \frac{1}{3}\times\frac{3}{2}t^{\frac{1}{2}}\times 2$$

$$= t^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2x-3}$$

これは (3) の検算である。

(5) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{2x-3}}\,dx$ を計算しよう．$2x-3=t$ とおくと $\dfrac{dt}{dx}=2$ だから $dx = \dfrac{1}{2}dt$. したがって 置換積分法を使って

$$\int \frac{1}{\sqrt{2x-3}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{t}}\frac{1}{2}\,dt$$

(2) により

$$= \frac{1}{2} \cdot 2t^{\frac{1}{2}} = t^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2x-3}$$

(6) $\dfrac{d}{dx}\left(\sqrt{2x-3}\right)$

$2x-3=t$ とおいて合成関数の微分法を使う。

$$\frac{d}{dx}\left((2x-3)^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{d}{dt}\left(t^{\frac{1}{2}}\right) \times \frac{dt}{dx} = \frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}} \times 2$$

$$= t^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2x-3}}$$

これは (5) の検算である。

4.3. (1) $\displaystyle\int x\sqrt{x^2+1}\,dx$ を計算せよ. ($x^2+1=t$ とおく)

$t=x^2+1$ とおき, この両辺を x で微分すると

$$2x = \frac{dt}{dx}$$

となるが, この両辺に $\dfrac{dx}{2x}$ を掛けると

$$dx = \frac{dt}{2x}$$

という等式が得られる. このことから dx を $\dfrac{1}{2x}\,dt$ に置き換えればよいことになる. (これは定理 6.3 (6.8) の置き換えと全く同じ置き換えである.)

この置き換えにより

$$\int x\sqrt{x^2+1}dx = \int x\sqrt{t}\left(\frac{1}{2x}dt\right) = \int \sqrt{t}\left(\frac{1}{2}dt\right) = \frac{1}{2}\,\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}}.$$

(2) $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}}\right)$

$x^2+1=t$ とおいて、合成関数の微分法を使う。

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{3}t^{\frac{3}{2}}\right) \times \frac{dt}{dx} = \frac{1}{3} \times \frac{3}{2}t^{\frac{1}{2}} \times 2x$$

$$= x\,t^{\frac{1}{2}} = x\sqrt{x^2+1}$$

これは (1) の検算である。

(3) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$ を計算せよ. ($x^2+1=t$ とおく)

(1) と同じ置き換えにより

$\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx \;=\; \int \frac{x}{\sqrt{t}}\left(\frac{1}{2x}dt\right) \;=\; \int \frac{1}{\sqrt{t}}\left(\frac{1}{2}dt\right) \;=\; \frac{1}{2}\,2t^{\frac{1}{2}} \;=$

$(x^2+1)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x^2+1}.$

(4) $\displaystyle\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x^2+1}\right)$

$x^2+1=t$ とおいて、合成関数の微分法を使う。

$$\frac{d}{dx}\left((x^2+1)^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{d}{dt}\left(t^{\frac{1}{2}}\right) \times \frac{dt}{dx} = \frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}} \times 2x$$

$$= x\,t^{-\frac{1}{2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

これは (3) の検算である。

4.4. (1) $\displaystyle\int \frac{dx}{2x+1}\,dx$

$$2x+1=t \qquad (*)$$

とおき, この両辺を x で微分すると

$$2 = \frac{dt}{dx}$$

となるが, この両辺に $\dfrac{dx}{2}$ を掛けると

$$dx = \frac{dt}{2} \qquad (**)$$

という等式が得られる. この $(**)$ から dx を $\dfrac{1}{2}\,dt$ に置き換えればよいことが分かる. このおきかえにより

$$\int \frac{dx}{2x+1} = \int \frac{1}{t}\,\frac{1}{2}\,dt = \frac{1}{2}\int \frac{1}{t}\,dt = \frac{1}{2}\,\log|t|$$

$t=2x+1$ だから

$$= \frac{1}{2}\log|2x+1|.$$

(2) $\displaystyle\int x\sqrt{1-x}\,dx$

$t = 1-x$ とおき両辺を x で微分すると

$$\frac{dt}{dx} = -1$$

となるが, この両辺に $-dx$ を掛けると

$$dx = -dt \qquad (**)$$

という等式が得られる. この $(**)$ から dx を $-dt$ に置き換えればよいことになる. $x = 1-t$ に注意して

$$\begin{aligned}\int x\sqrt{1-x}\,dx &= \int x\sqrt{t}\,(-dt) = \int (1-t)\sqrt{t}\,(-dt)\\ &= \int (t-1)\sqrt{t}\,dt = \int t\sqrt{t}\,dt - \int \sqrt{t}\,dt = \int t^{\frac{3}{2}}\,dt - \int t^{\frac{1}{2}}\,dt\\ &= \frac{2}{5}\,t^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}\,t^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{5}\,(1-x)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}\,(1-x)^{\frac{3}{2}}.\end{aligned}$$

(3) 訂正あり $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\sqrt{1+\sin x}}\,dx$

$$1+\sin x = t$$

とおき置換積分法を使う. 両辺 x で微分して

$$\cos x = \frac{dt}{dx}$$

両辺に dx をかけて

$$\cos x\,dx = dt$$

だから $1+\sin x$ を t に, $\cos x\,dx$ を dt に置き換えなければならないので

$$\int \frac{\cos x}{\sqrt{1+\sin x}}\,dx = \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{t} = 2\sqrt{1+\sin x}.$$

(4) $\displaystyle\int x(1-x)^4\,dx$

(2) と同様に $1-x=t$ による変換で

$$\int x(1-x)^4\,dx = \int xt^4\,(-dt) = \int (1-t)t^4\,(-dt)$$
$$= \int (t-1)t^4\,dt = \int t^5\,dt - \int t^4\,dt$$
$$= \frac{1}{6}t^6 - \frac{1}{5}t^5 = \frac{1}{6}(1-x)^6 - \frac{1}{5}(1-x)^5$$

(5) $\displaystyle\int \sin^2 x \cos x\,dx$

$\sin x = t$ とおくと $\cos x dx = dt$ だから
$$\int \sin^2 x \cos x\,dx = \int t^2 dt = \frac{1}{3}t^3 = \frac{1}{3}\sin^3 x$$

(6) 追加 $\displaystyle\int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx$

$\cos x = t$ とおく。両辺微分して $-\sin x = \dfrac{dt}{dx}$

$\sin x\,dx = -dt$

これらで置き換えをして
$$\int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = \int \frac{-dt}{t} = -\log|t| = -\log|\cos x|$$