

電気のための微分積分B 第3回問題 解答

3.1. (1) $F(x)$ が $f(x)$ の原始関数であるというのは

$$\underline{\frac{d}{dx}F(x) = f(x)}$$

となる事である。ただし $\frac{d}{dx}F(x)$ は $F'(x)$ と同じで $F(x)$ の導関数
を表す記号である。

(式のみ書くのは不可。)

(2) $f(x)$ の不定積分とは

$$\underline{F(x) + C}$$

のこである。ただし、 $F(x)$ は $f(x)$ の原始関数であり、 C は任意
の定数である。この定数 C を積分定数という。

(式のみ書くのは不可。)

$f(x)$ の不定積分を記号

$$\int f(x)dx$$

で表す。したがって

$$\int f(x) dx = F(x) + C \iff \frac{d}{dx}F(x) = f(x)$$

である。しばらく積分定数は省略してもよいことにする。

3.2. (1) C を定数とするとき

$$\frac{d}{dx}(C) = 0$$

だから

$$\int 0 dx = C$$

$$(2) \frac{d}{dx}2x = 2$$

だから

$$\int 2 dx = 2x + C$$

$$(3) \frac{d}{dx} x^2 = 2x$$

だから両辺を2で割って

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dx} (x^2) = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2} x^2 \right) = x$$

だから

$$\int x dx = \frac{x^2}{2} + C$$

$$(4) \frac{d}{dx} x^3 = 3x^2$$

だから両辺を3で割って

$$\frac{1}{3} \frac{d}{dx} (x^3) = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{3} x^3 \right) = x^2$$

だから

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$$

(5) a を0でない定数とするとき,

$$\frac{d}{dx} x^a = ax^{a-1}$$

だから両辺を a で割って

$$\frac{1}{a} \frac{d}{dx} (x^a) = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{a} x^a \right) = x^{a-1}$$

ここで $a-1 = \alpha$ とおくと $a = \alpha + 1$ となるから.

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\alpha + 1} x^{\alpha+1} \right) = x^\alpha$$

だから $\alpha \neq -1$ のとき

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha + 1} + C$$

$$(6) \frac{d}{dx} \sin x = \cos x$$

だから

$$\int \cos x \, dx = \sin x + C$$

である. または

$$\frac{d}{dx} \sin x = \sin \left(x + \frac{\pi}{2} \right)$$

だから

$$\frac{d}{dx} \sin \left(x - \frac{\pi}{2} \right) = \sin x$$

したがって

$$\int \sin x \, dx = \sin \left(x - \frac{\pi}{2} \right)$$

でもよい. とういかこっちがよい。

$$(7) \frac{d}{dx} \cos x = -\sin x$$

だから

$$\frac{d}{dx} (-\cos x) = \sin x$$

だから

$$\int \sin x \, dx = -\cos x$$

である. または

$$\frac{d}{dx} \cos x = \cos \left(x + \frac{\pi}{2} \right)$$

だから $\left(x + \frac{\pi}{2} \right)$ を x でおきかえて, また x を $x - \frac{\pi}{2}$ でおきかえて)

$$\frac{d}{dx} \cos \left(x - \frac{\pi}{2} \right) = \cos x$$

したがって

$$\int \cos x \, dx = \cos \left(x - \frac{\pi}{2} \right)$$

でもよい. とういかこっちがよい。

(8) $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ である. $\alpha = \frac{1}{2}$ として (5) を用いると

$$\int \sqrt{x} dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C$$

(9) $x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$ である. $\alpha = -\frac{1}{2}$ として (5) を用いると

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx &= \int x^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = 2x^{\frac{1}{2}} + C \\ &= 2\sqrt{x} + C \end{aligned}$$

(10) $\frac{1}{x} = x^{-1}$ であるが (5) は使えない.

$$\frac{d}{dx} \log|x| = \frac{1}{x}$$

だから不定積分の定義により

$$\int \frac{1}{x} dx = \log|x| + C.$$

(11) $\frac{d}{dx} e^x = e^x$

だから不定積分の定義により

$$\int e^x dx = e^x + C.$$

3.3. 積分定数 C は省略する.

$$(1) \int (x^2 + 3x) dx = \int x^2 dx + 3 \int x dx = \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2}.$$

$$\begin{aligned} (2) \int (\sqrt{x} + 1)^2 dx &= \int (x + 2\sqrt{x} + 1) dx \\ &= \int x dx + 2 \int \sqrt{x} dx + \int 1 dx = \frac{1}{2}x^2 + 2 \times \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + x + C \\ &= \frac{1}{2}x^2 + \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} + x + C \end{aligned}$$

$$(3) \int (8x^3 - 2 \cos x) dx = 8 \int x^3 dx - 2 \int \cos x dx = 2x^4 - 2 \sin x.$$

または

$$= 2x^4 - 2 \cos \left(x - \frac{\pi}{2} \right).$$

$$(4) \int \frac{x+1}{x} dx = \int \left(1 + \frac{1}{x} \right) dx = x + \log |x|.$$

$$(5) \int \left(\sqrt{x^3} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx = \int (x^{\frac{3}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}) dx = \frac{1}{1 + \frac{3}{2}} x^{1 + \frac{3}{2}} + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} x^{1 - \frac{1}{2}} \\ = \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} + 2 x^{\frac{1}{2}}.$$

$$(6) \int (x-1)(x^2+1) dx = \int (x^3 - x^2 + x - 1) dx = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - x.$$

$$(7) \int (9x^2 + 2e^x) dx = 9 \int x^2 dx + 2 \int e^x dx = 3x^3 + 2e^x.$$

$$(8) \int (\sin x - \cos x) dx = -\cos x - \sin x$$

または

$$= \sin \left(x - \frac{\pi}{2} \right) - \cos \left(x - \frac{\pi}{2} \right)$$