電気のための微分積分 B 演習問題 No.1 解答

問題 1. 次の導関数・高階導関数を計算せよ。

(1) $(x^4)' = 4x^3,\ (x^4)'' = (4x^3)' = 12x,\ (x^4)''' = (12x)' = 12,$
$(x^4)^{(4)} = (12)' = 0,\ n = 4, 5, 6, \cdots$ のとき $(x^4)^{(n)} = 0,$

(2) $(\sqrt{x^2+1})'$ を計算しよう。$t = x^2 + 1,\ y = \sqrt{x^2+1}$ とおくと $y = \sqrt{x^2+1}$ は $y = \sqrt{t},\ t = x^2 + 1$ の合成関数であり, 合成関数の微分法により

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{d}{dt}\sqrt{t}\frac{d}{dx}(x^2+1) = \frac{1}{2\sqrt{t}}2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

である。つぎに

$$(\sqrt{x^2+1})'' = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)' = \frac{(x)'\sqrt{x^2+1} - x(\sqrt{x^2+1})'}{x^2+1}$$

$$= \frac{\sqrt{x^2+1} - x\,\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \frac{x^2+1-x^2}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$$

(3) 積の微分法により, $(xe^x)' = (x)'e^x + x(e^x)' = e^x + xe^x$

(4) (1) の結果を, 積の微分法によりさらに微分すると
$(xe^x)'' = (e^x + xe^x)' = e^x + e^x + xe^x = 2e^x + xe^x$

(5) (3), (4) の計算を繰り返せば

$(xe^x)^{(n)} = ne^x + xe^x \cdots (\star),\ n = 1, 2, \cdots$

となることが予想されるが, これを数学的帰納法で示そう。

(3) より $n = 1$ のときは正しい。

$(xe^x)^{(n-1)} = (n-1)e^x + xe^x$

が正しいと仮定すると（帰納法の仮定), 両辺微分して

$(xe^x)^{(n)} = (n-1)e^x + (x)'e^x + x(e^x)' = (n-1)e^x + e^x + xe^x = ne^x + xe^x$

となるから n の時も正しい。したがってすべての n に対して正しい.

教科書 99 ページの Leibnitz の公式を使ってもよい。

問題 2. (発展問題) (1) 関数 $f(x)$ は何回でも微分できるとするとき,

$$(xf(x))^{(n)} = xf^{(n)}(x) + nf^{(n-1)}(x)$$

であることを確かめよ。(数学的帰納法を使う。)

(i) $n = 1$ のときは積の微分法により

$(xf(x))' = (x)'f(x) + xf'(x) = 1 \cdot f^{(0)}(x) + xf^{(1)}(x)$

となるから正しい。

(ii) $n-1$ の時正しいと仮定する。(帰納法の仮定) つまり

$(xf(x))^{(n-1)} = xf^{(n-1)}(x) + (n-1)f^{(n-2)}(x)$

が正しいと仮定する。このときさらに両辺を微分して

$(xf(x))^{(n)} = \left(xf^{(n-1)}(x) + (n-1)f^{(n-2)}(x)\right)'$

$= f^{(n-1)}(x) + xf^{(n)}(x) + (n-1)f^{(n-1)}(x) = nf^{(n-1)}(x) + xf^{(n)}(x)$

だから n のときも正しい。

したがってすべての n に対して正しい。

(2) $(\sin x)' = \cos x = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$ をくり返し使って (教科書 86 ページを見よ。)

$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \dfrac{n\pi}{2}\right)$

が分かるから, (1) で $f(x) = \sin x$ として

$(x\sin(x))^{(n)} = x\sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) + n\sin\left(x + \frac{(n-1)\pi}{2}\right)$

がえられる。

3 次の関数の増減・凹凸を調べ, 極値および変曲点を求めよ. また, グラフの概形を描け.

(1) $f(x) = x^3 - 3x^2$,

[増減を調べる]

$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$

だから $f'(x) = 0$ となるのは $x = 0, 2$ のとき。また

$x < 0$ のとき $x < 0$ かつ $x - 2 < 0$ だから $f'(x) = 3x(x-2) > 0$, だからここで狭義単調増加

$0 < x < 2$ のとき $x > 0$ かつ $x - 2 < 0$ だから $f'(x) = 3x(x-2) < 0$, だからここで狭義単調減少

$x > 2$ のとき $x > 0$ かつ $x - 2 > 0$ だから $f'(x) = 3x(x-2) > 0$, だからここで狭義単調増加

[凹凸を調べる]

$f''(x) = 6x - 6 = 6(x-1)$

だから $f''(x) = 0$ となるのは $x = 1$ のとき。また

$x < 1$ のとき $f''(x) < 0$ だから上に凸

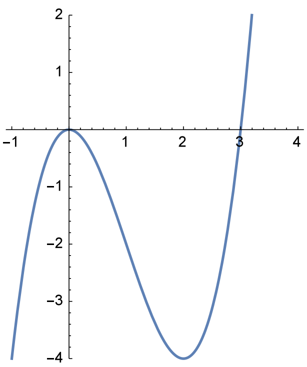
$x > 1$ のとき $f''(x) > 0$ だから下に凸

[増減表を書く] 以上から増減凹凸を調べると

x		0		1		2	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
f	$\nearrow$	0	$\searrow$	-2	$\searrow$	-4	$\nearrow$

となる．ここで $\nearrow$ は単調増加かつ上に凸, $\searrow$ は単調減少かつ上に凸, $\searrow$ は単調減少かつ下に凸, $\nearrow$ は単調増加かつ下に凸 を表す。

だから $x = 0$ で極大値 0 をとり $x = 2$ で極小値 -4 をとる．変曲点は $(1, -2)$.



Mathematica で作図するにはコマンド

```
Plot[x^3 - 3 x^2, {x, -1, 4}]
```

を用いる.

(2) $f(x) = \dfrac{4}{x^2+3}$ とする。

[増減を調べる]　$f(x) = 4(x^2+3)^{-1}$ とみる。

$f(x) = y,\ x^2+3 = t$ とおいて合成関数の微分法を使う.

$y = 4(x^2+3)^{-1}$ は $y = 4t^{-1},\ t = x^2+3$ の合成関数である。

$y = 4t^{-1}$ の導関数は $\dfrac{dy}{dt} = 4\left(t^{-1}\right)' = 4(-1)t^{-2} = -\dfrac{4}{t^2}$

$x^2+3 = t$ の導関数は $\dfrac{dt}{dx} = \left(x^2+3\right)' = 2x$

合成関数の微分法により

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \times \frac{dt}{dx} = -\frac{4}{t^2} \times 2x = \frac{-8x}{(x^2+3)^2}$$

である。だから $f'(x) = 0$ となるのは $x = 0$ のとき。またすべての x に対して $(x^2+3) > 0$ だから

　$x < 0$ のとき $f'(x) > 0$, だからここで狭義単調増加

　$0 < x$ のとき $f'(x) < 0$, だからここで狭義単調減少

[凹凸を調べる]　商の微分法により

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{(-8x)'(x^2+3)^2 - (-8x)\left\{(x^2+3)^2\right\}'}{(x^2+3)^4} \\ &= \frac{-8(x^2+3)^2 + 8x \cdot 2(x^2+3) \cdot (2x)}{(x^2+3)^4} \\ &= \frac{-8(x^2+3) + 8x \cdot 2 \cdot (2x)}{(x^2+3)^3} = \frac{-8x^2 - 24 + 32x^2}{(x^2+3)^3} \\ &= \frac{24(x^2-1)}{(x^2+3)^3} = \frac{24(x+1)(x-1)}{(x^2+3)^3} \end{aligned}$$

だから $f''(x) = 0$ となるのは $x = \pm 1$ のとき。また $x^2+3 > 0$ に注意して

　$x < -1$ のとき $f''(x) > 0$ だから下に凸

　$-1 < x < 1$ のとき $f''(x) < 0$ だから上に凸

　$1 < x$ のとき $f''(x) > 0$ だから下に凸

[極限を調べる]

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{4}{x^2+3}=\frac{4}{\infty}=+0,$$

[増減表を書く] 以上から増減凹凸を調べると

x	$-\infty$		-1		0		1		∞
$f'(x)$		$+$		$+$	0	$-$	$-$	$-$	
$f''(x)$		$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↗	1	↗	$\frac{4}{3}$	↘	1	↘	0
			変曲点		極大		変曲点		

だから $x=0$ で最大値 $\frac{4}{3}$ をとり, 変曲点は $(\pm1,1)$.