積分の基本事項集

学生番号		氏名		

1. (不定積分の定義)

(1) 「関数 $F(x)$ が関数 $f(x)$ の原始関数である」とはどういうことか、その定義を書け.

$F'(x) = f(x)$ となることである。

(2) 関数 $f(x)$ の不定積分を $\int f(x)\,dx$ で表す.

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \iff \frac{d}{dx}\boxed{F(x)} = \boxed{f(x)}$$

以後, 積分定数 C を省略する.

2. (主な関数の不定積分)

(1) $\frac{d}{dx}x^3 = \boxed{3x^2}$

だから

$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3}x^3\right) = \boxed{x^2}$

だから

$\int x^2\,dx = \boxed{\frac{1}{3}x^3}$

(2) a を 0 でない定数とするとき,

$\frac{d}{dx}x^a = \boxed{a\,x^{a-1}}$

だから

$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{a}x^a\right) = \boxed{x^{a-1}}$

だから

$\int x^{a-1}\,dx = \boxed{\frac{1}{a}x^a}$

ここで $b = a-1$ とおいて

$\int x^b\,dx = \boxed{\frac{1}{b+1}x^{b+1}}$.

(3) $\frac{d}{dx}\log|x| = \boxed{\frac{1}{x}}$

だから

$\int \frac{1}{x}\,dx = \boxed{\log|x|}$.

(4) $\frac{d}{dx}e^x = \boxed{e^x}$

だから

$\int e^x\,dx = \boxed{e^x}$.

(5) $\frac{d}{dx}\sin x = \boxed{\cos x}$ 又は $\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$

だから

$\int \cos\,dx = \boxed{\sin x}$. 又は $\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$

(6) $\frac{d}{dx}\cos x = \boxed{-\sin x}$ 又は $\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$

だから

$\int \sin x\,dx = \boxed{-\cos x}$ 又は $\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$.

3. (不定積分の性質)

(1) $\int (f(x)+g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int (f(x)+g(x))\,dx$

(2) $\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$

ただし, ここで k は定数であり $\int xf(x)\,dx = x\int f(x)\,dx$ は誤り.

4. (べき関数の不定積分)

(1) 空欄に適する式を書け.

$$\begin{array}{ccccccccc}
x^{-1} & & x^{-\frac{1}{2}} & & x^0 & & x^{\frac{1}{2}} & & x^1 \\
\| & & \| & & \| & & \| & & \| \\
\boxed{\frac{1}{x}} & \xrightarrow{\boxed{\sqrt{x}}\text{倍}} & \boxed{\frac{1}{\sqrt{x}}} & \xrightarrow{\boxed{\sqrt{x}}\text{倍}} & \boxed{1} & \xrightarrow{\boxed{\sqrt{x}}\text{倍}} & \boxed{\sqrt{x}} & \xrightarrow{\boxed{\sqrt{x}}\text{倍}} & \boxed{x}
\end{array}$$

(2) $\frac{1}{\sqrt{x}} = x^{\boxed{-\frac{1}{2}}}$ だから

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \int x^{-\frac{1}{2}}\,dx \overset{2\,(2)\text{より}}{=} \frac{1}{-\frac{1}{2}+1}x^{-\frac{1}{2}+1}$$

$$= 2x^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{x}$$

(3) $\sqrt{x} = x^{\boxed{\frac{1}{2}}}$ だから

$$\int \sqrt{x}\,dx = \int x^{\frac{1}{2}}\,dx \overset{2\,(2)\text{より}}{=} \frac{1}{\frac{1}{2}+1}x^{\frac{1}{2}+1}$$

$$= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} \quad /\!/ \quad (x\sqrt{x}\text{ にしなくてもよい})$$

(4) $\frac{1}{x^2} = x^{\boxed{-2}}$ だから

$$\int \frac{1}{x^2}\,dx = \int x^{-2}\,dx \overset{2\,(2)\text{より}}{=} \frac{1}{-2+1}x^{-2+1}$$

$$= -x^{-1} = -\frac{1}{x}$$

(5) $\int \left(3x-2-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)dx$

$= 3\int x\,dx - 2\int 1\,dx - 2\int \frac{dx}{\sqrt{x}}$

$= 3\times\frac{x^2}{2} - 2\times x - 2\times 2\sqrt{x} = \frac{3}{2}x^2 + 2x - 4\sqrt{x}$.

5. (置換積分法)

$\int (x\text{の関数})\,dx$ を

(手順1) $x=\varphi(t)$ または $\psi(x)=t$ とおくことにより x の関数を t の関数に変形する.

(手順2) (手順1)の関係式を微分して $dx = \boxed{}\,dt$ の形の関係式を得る.

ことにより, $\int (t\text{の関数})\,dt$ に変形することができて積分が計算できることがある. この方法を置換積分法という.

(1) $3x+1=t\cdots(*)$ とおくと

$(3x+1)^4 = \boxed{t^4}$

$(*)$ の両辺を x で微分すると

$\frac{dt}{dx} = \boxed{3}$

だから $dx = \boxed{\frac{1}{3}}\,dt$. これらを使って

$\int (3x+1)^4\,dx = \int t^4\times\frac{1}{3}dt$

$= \frac{1}{3}\int t^4 dt = \frac{1}{3}\frac{1}{4+1}t^{4+1} = \frac{1}{15}t^5$

$= \frac{1}{15}(3x+1)^5$ //

(2) (1) と同じ変数変換で

$\int \sqrt{3x+1}\,dx = \int \sqrt{t}\cdot\frac{dt}{3} = \frac{1}{3}\int\sqrt{t}\,dt$

$= \frac{1}{3}\times\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{9}(3x+1)^{\frac{3}{2}}$

(3) (1) と同じ変数変換で

$\int \frac{1}{3x+1}dx = \int\frac{1}{t}\frac{dt}{3} = \frac{1}{3}\int\frac{dt}{t}$

$= \frac{1}{3}\log|t| = \frac{1}{3}\log|3x+1|$ //

(4) (1) と同じ変数変換で

$\int e^{3x+1}dx = \int e^t\frac{dt}{3} = \frac{1}{3}\int e^t dt$

$= \frac{1}{3}e^t = \frac{1}{3}e^{(3x+1)}$

(5) $3x+\frac{\pi}{2}=t$ とおくと $dx=\frac{dt}{3}$ だから.

$\int \sin(3x+\frac{\pi}{2})\,dx = \int \sin t\cdot\frac{dt}{3} = \frac{1}{3}\int\sin t\,dt$.

$= -\frac{1}{3}\cos t = -\frac{1}{3}\cos(3x+\frac{\pi}{2})$

又は 等しい.

$= \frac{1}{3}\sin(t-\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{3}\sin(3x)$.

(6) $x^2+1=t\cdots(*)$ とおくと

$(x^2+1)^4 = \boxed{t^4}$

$(*)$ の両辺を x で微分すると

$\frac{dt}{dx} = \boxed{2x}$

だから $dx = \boxed{\frac{1}{2x}}\,dt$. これらを使って

$\int (x^2+1)^4 x\,dx = \int t^4 x\cdot\frac{dt}{2x} = \frac{1}{2}\int t^4 dt$

$= \frac{1}{2}\times\frac{1}{5}t^5 = \frac{1}{10}(x^2+1)^5$ //

(7) $x=\sin t\ \left(-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}\right)\cdots(*)$ とおくと　この区間で $\cos t>0$ だから.

$\sqrt{1-x^2} = \boxed{}$ $= \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{\cos^2 t} = \cos t$.

$(*)$ の両辺を t で微分すると

$\frac{dx}{dt} = \boxed{\cos t}$

だから $dx = \boxed{\cos t}\,dt$. これらを使って

$\int\sqrt{1-x^2}\,dx =$ (t で表してよい)　$\cos^2 t = \frac{1+\cos 2t}{2}$ より

$= \int \cos t\cdot\cos t\,dt$

$= \int \cos^2 t\,dt = \int\frac{1+\cos 2t}{2}dt$.

$= \frac{1}{2}\int dt + \frac{1}{2}\int\cos 2t\,dt$

ここで $2t=s$ とおくと $\frac{ds}{dt}=2$ だから $dt=\frac{ds}{2}$ で

$= \frac{1}{2}\int dt + \frac{1}{2}\int\cos s\cdot\frac{ds}{2}$.

$= \frac{t}{2} + \frac{1}{4}\sin s = \frac{t}{2} + \frac{1}{4}\sin 2t$. //

さらに続けると

$= \frac{1}{2}\sin^{-1}x + \frac{1}{2}\underbrace{\sin t}_{=x}\,\underbrace{\cos t}_{=\sqrt{1-\sin^2 t}=\sqrt{1-x^2}}$

$= \frac{1}{2}\sin^{-1}x + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}$ //