積分の基本事項集

学生番号		氏名		

1. (不定積分の定義)

(1) 「関数 $F(x)$ が関数 $f(x)$ の原始関数である」とはどういうことか、その定義を書け.

(2) 関数 $f(x)$ の不定積分を $\displaystyle\int f(x)\,dx$ で表す.

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \iff \frac{d}{dx}\boxed{\quad} = \boxed{\quad}$$

以後, 積分定数 C を省略する.

2. (主な関数の不定積分)

(1) $\displaystyle\frac{d}{dx}x^3 = \boxed{\quad}$
だから

$\displaystyle\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3}x^3\right) = \boxed{\quad}$
だから

$\displaystyle\int x^2\,dx = \boxed{\quad}$

(2) a を 0 でない定数とするとき,

$\displaystyle\frac{d}{dx}x^a = \boxed{\quad}$
だから

$\displaystyle\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{a}x^a\right) = \boxed{\quad}$
だから

$\displaystyle\int x^{a-1}\,dx = \boxed{\quad}$

ここで $b = a - 1$ とおいて

$\displaystyle\int x^b\,dx = \boxed{\quad}$.

(3) $\displaystyle\frac{d}{dx}\log|x| = \boxed{\quad}$
だから

$\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx = \boxed{\quad}$.

(4) $\displaystyle\frac{d}{dx}e^x = \boxed{\quad}$
だから

$\displaystyle\int e^x\,dx = \boxed{\quad}$.

(5) $\displaystyle\frac{d}{dx}\sin x = \boxed{\quad}$
だから

$\displaystyle\int \cos\,dx = \boxed{\quad}$.

(6) $\displaystyle\frac{d}{dx}\cos x = \boxed{\quad}$
だから

$\displaystyle\int \sin x\,dx = \boxed{\quad}$.

3. (不定積分の性質)

(1) $\displaystyle\int (f(x)+g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int (f(x)+g(x))\,dx$

(2) $\displaystyle\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$

ただし, ここで k は定数であり $\displaystyle\int xf(x)\,dx = x\int f(x)\,dx$ は誤り.

4. (べき関数の不定積分)

(1) 空欄に適する式を書け.

$$\begin{array}{ccccccccc}
x^{-1} & & x^{-\frac{1}{2}} & & x^{0} & & x^{\frac{1}{2}} & & x^{1} \\
\| & & \| & & \| & & \| & & \| \\
\boxed{\quad} & \xrightarrow{} & \boxed{\quad} & \xrightarrow{} & \boxed{\quad} & \xrightarrow{} & \boxed{\quad} & \xrightarrow{} & \boxed{\quad} \\
 & \boxed{\quad}\text{倍} & & \boxed{\quad}\text{倍} & & \boxed{\quad}\text{倍} & & \boxed{\quad}\text{倍} &
\end{array}$$

(2) $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{x}} = x^{\boxed{\quad}}$ だから

$\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$

(3) $\sqrt{x} = x^{\boxed{\quad}}$ だから

$\displaystyle\int \sqrt{x}\,dx$

(4) $\displaystyle\frac{1}{x^2} = x^{\boxed{\quad}}$ だから

$\displaystyle\int \frac{1}{x^2}\,dx$

(5) $\displaystyle\int \left(3x - 2 - \frac{2}{\sqrt{x}}\right) dx$

5. (置換積分法)

$\displaystyle\int (x \text{ の関数})\, dx$ を

(手順 1) $x = \varphi(t)$ または $\psi(x) = t$ とおくことにより x の関数を t の関数に変形する.

(手順 2) (手順 1) の関係式を微分して $dx = \boxed{}\, dt$ の形の関係式を得る.

ことにより, $\displaystyle\int (t \text{ の関数})\, dt$ に変形することができて積分が計算できることがある. この方法を置換積分法という.

(1) $3x + 1 = t \cdots (*)$ とおくと

$(3x+1)^4 = \boxed{}$

$(*)$ の両辺を x で微分すると

$\dfrac{dt}{dx} = \boxed{}$

だから $dx = \boxed{}\, dt$. これらを使って

$\displaystyle\int (3x+1)^4\, dx =$

(2) (1) と同じ変数変換で

$\displaystyle\int \sqrt{3x+1}\, dx =$

(3) (1) と同じ変数変換で

$\displaystyle\int \frac{1}{3x+1}\, dx =$

(4) (1) と同じ変数変換で

$\displaystyle\int e^{3x+1}\, dx =$

(5)

$\displaystyle\int \sin(3x + \frac{\pi}{2})\, dx =$

(6) $x^2 + 1 = t \cdots (*)$ とおくと

$(x^2+1)^4 = \boxed{}$

$(*)$ の両辺を x で微分すると

$\dfrac{dt}{dx} = \boxed{}$

だから $dx = \boxed{}\, dt$. これらを使って

$\displaystyle\int (x^2+1)^4 x\, dx =$

(7) $x = \sin t \left(-\dfrac{\pi}{2} < t < \dfrac{\pi}{2}\right) \cdots (*)$ とおくと

$\sqrt{1-x^2} = \boxed{}$

$(*)$ の両辺を t で微分すると

$\dfrac{dx}{dt} = \boxed{}$

だから $dx = \boxed{}\, dt$. これらを使って

$\displaystyle\int \sqrt{1-x^2}\, dx =$ (t で表してよい)