電気のための微分積分 B 試験解答

1 $f(x) = x^3 - 3x + 2$ について次の問いに答えよ.

(1) $f'(x)$, $f''(x)$ を求めよ.

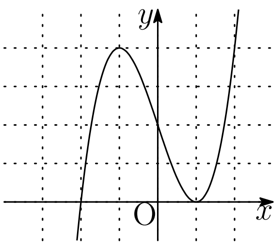
$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1)$,

$f''(x) = 6x$

(2) 次の増減表を凹凸も含めて完成させよ. (訂正)

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	↗	4	↘	2	↘	0	↗

(3) $y = f(x)$ のグラフの概形をかけ.



2 (1) 関数 $f(x)$ の n 次のマクローリン近似多項式 $P_n(x)$ の定義を書け.

$$P_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

(2) とくに $f(x) = e^x$ であるときの $P_n(x)$ を書け.

$f(x) = f'(x) = f''(x) = \cdots = e^x$ だから $f(0) = f'(0) = f''(0) = \cdots = e^0 = 1$ したがって

$P_n(x) = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!}$

(3) (2) で $n = 2$ として $P_2(x)$ を作り, これを利用して $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^x} = 0$ であることを示せ. ($x > 0$ のとき $e^x \geqq P_2(x)$ であることを使ってよい.)

$$e^x \geqq P_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} \quad \text{だから } x \to \infty \text{ のとき}$$

$$0 < \frac{x}{e^x} \leqq \frac{x}{1 + x + \frac{x^2}{2}} \leqq \frac{1}{\frac{1}{x} + 1 + \frac{x}{2}} \to \frac{1}{\frac{1}{\infty} + 1 + \infty} = 0$$

3 (1) $\displaystyle\int f(x)\,dx = F(x) + C$ であることの定義をかけ.

不定積分の定義は

$$\frac{d}{dx}F(x) = f(x) \text{ であるとき } \int f(x)\,dx = F(x) + C \text{ と定める」}$$

であるから,

$$「\frac{d}{dx}F(x) = f(x) \text{ であること」}$$

と書けばよい。$\frac{d}{dx}(F(x)+C) = f(x)$ は正しいが $\frac{d}{dx}F(x)+C = f(x)$ は誤り。括弧をきちんと書くこと。

4 次の不定積分を計算せよ. 積分定数は省略する.

(1) $\displaystyle\int (2x^3 - 3x^2)\,dx = \frac{1}{2}x^4 - x^3$

(2) $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ だから

$$\int \frac{\sqrt{x}}{2}\,dx = \int \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{1}{2}\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} = \frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}$$

(3) $\displaystyle\int \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x}\right)dx = \int x^{-\frac{1}{2}}\,dx - \int \frac{1}{x}\,dx = \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} - \log|x| = 2\sqrt{x} - \log|x|$

(4) $\displaystyle\int (2x+1)^5\,dx \qquad 2x+1 = t \cdots (*)$ とおくと

$(2x+1)^5 = t^5$

$(*)$ の両辺を x で微分すると

$$\frac{dt}{dx} = 2$$

だから $dx = \frac{1}{2}\,dt$. これらを使って

$$\int (2x+1)^5\,dx = \int t^5\,\frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\frac{t^{5+1}}{5+1} = \frac{t^6}{12} = \frac{1}{12}(2x+1)^6$$

(5) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{2x+1}}\,dx \qquad$ (4) と同じ変数変換を使って

$$\int \frac{1}{\sqrt{2x+1}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{t}}\frac{dt}{2} = \int t^{-\frac{1}{2}}\,\frac{dt}{2}$$

(3) と同じ計算で

$$= \frac{1}{2}2t^{\frac{1}{2}} = (2x+1)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2x+1}$$

(6) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{2x+1}}\,dx$

[解法 1] (4) と同じ変数変換を使って $2x+1 = t$, $x = \frac{1}{2}(t-1)$, $dx = \frac{dt}{2}$ だから

$$\int \frac{x}{\sqrt{2x+1}}\,dx = \int \frac{\frac{1}{2}(t-1)}{\sqrt{t}}\frac{dt}{2} = \int\left(\frac{1}{4}\sqrt{t} - \frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{t}}\right)dt = \frac{1}{6}t^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}t^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{6}(2x+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}(2x+1)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}(x-1)\sqrt{2x+1}$$

x は定数でないから $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{t}}\frac{dt}{2} = x\int \frac{1}{\sqrt{t}}\frac{dt}{2}$ は誤り.

[解法 2] (5) より $\dfrac{1}{\sqrt{2x+1}} = \left(\sqrt{2x+1}\right)'$ だから部分積分法により

$$\int \frac{x}{\sqrt{2x+1}}\,dx = \int x\left(\sqrt{2x+1}\right)' dx = x\left(\sqrt{2x+1}\right) - \int \sqrt{2x+1}\,dx$$

$$= x\sqrt{2x+1} - \frac{1}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}(x-1)\sqrt{2x+1}\ .$$

(7) $\displaystyle\int \sin(2x)\,dx$ (4) と同様に $2x = t \cdots (*)$ とおくと $dx = \dfrac{1}{2}dt$, したがって

$$\int \sin(2x)\,dx = \int \sin t\,\frac{dt}{2} = -\frac{1}{2}\cos t = -\frac{1}{2}\cos(2x)$$

(8) $\displaystyle\int x\sin(2x)\,dx$ は (7) より $\sin(2x) = \left(-\dfrac{1}{2}\cos(2x)\right)'$ だから 部分積分法を使って

$$\begin{aligned}\int x\sin(2x)\,dx &= \int x\left(-\frac{1}{2}\cos(2x)\right)' dx \\ &= x\left(-\frac{1}{2}\cos(2x)\right) - \int (x)'\left(-\frac{1}{2}\cos(2x)\right) dx \\ &= x\left(-\frac{1}{2}\cos(2x)\right) + \frac{1}{2}\int \cos(2x)\,dx \\ &= -\frac{x}{2}\cos(2x) + \frac{1}{4}\sin(2x)\end{aligned}$$

(9) $e^x = t$ とおくと $\dfrac{dt}{dx} = e^x = t$ だから $dx = \dfrac{dt}{t}$ で

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{e^x-1}\,dx &= \int \frac{1}{t-1}\frac{dt}{t} = \int \frac{dt}{t(t-1)} \\ &= \int \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t}\right) dt = \log|t-1| - \log|t| \\ &= \log\left|\frac{e^x-1}{e^x}\right|\end{aligned}$$

(10) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos x}\,dx$ (分母分子に $\cos x$ をかけて $\sin x = t$ とおけ)

$dx = \dfrac{dt}{\cos x}$ だから

$$\int \frac{1}{\cos x}\,dx = \int \frac{\cos x}{1-\sin^2 x}\,dx = \int \frac{1}{1-t^2}\,dt = \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t}\right) dt = \frac{1}{2}\log\left|\frac{\sin x+1}{\sin x-1}\right|$$

5 (1) $\dfrac{3x-3}{x^2-4x-5}$ を部分分数に分解せよ.

$$\frac{3x-3}{x^2-4x-5} = \frac{3x-3}{(x+1)(x-5)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-5} \ (x \text{ の恒等式})$$

となる定数 A, B がある。

右辺 $= \dfrac{(A+B)x-5A+B}{(x+1)(x-5)}$

だから分子同士比較して

$A+B=3,\ -5A+B=-3$。これを解いて $A=1,\ B=2$ 以上から

$$\frac{3x-3}{x^2-4x-5} = \frac{1}{x+1} + \frac{2}{x-5}$$

(2) $\displaystyle\int \frac{3x-3}{x^2-4x-5}\,dx = \int \left(\frac{1}{x+1} + \frac{2}{x-5}\right) dx = \log|x+1| + 2\log|x-5|$

6 $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+4}\,dx$ を計算したい.

(1) $x = 2\tan t,\ \left(-\dfrac{\pi}{2} < t < \dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくとき

$$x^2+4 = 4(\tan^2 t + 1) = \frac{4}{\cos^2 t}$$

$$dx = \frac{2}{\cos^2 t}\,dt$$

(2) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+4}\,dx = \frac{1}{2}\int dt = \frac{t}{2} = \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)$