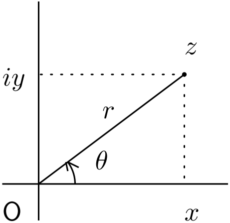
本日やること

1. 初等関数の導関数
   - 複素指数関数

初等関数の導関数

複素指数関数

復習 複素数の極形式



複素数 $z = x + iy$ に対して

$r =$ 点 z と原点 O の距離,

$\theta =$ 線分 Oz と 実軸の正の部分とのなす角

とおくと,

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{①}$$

と表される. これを複素数 z の極形式という.

$r = |z|$: 絶対値 という

$\theta = \arg z$: 偏角 という

初等関数の導関数

複素指数関数

復習 回し伸ばしの原理

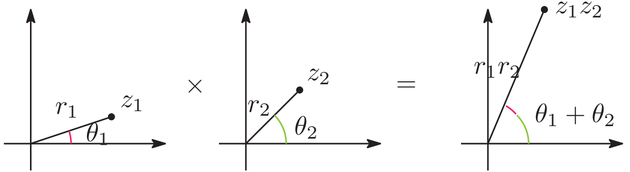
2 つの複素数 z_1, z_2 の積 $z_1 z_2$, 商 $\dfrac{z_1}{z_2}$ は

(i) $\arg\, z_1 z_2 = \arg\, z_1 + \arg\, z_2,$ $\qquad |z_1 z_2| = |z_1||z_2|$

(ii) $\arg\, \dfrac{z_1}{z_2} = \arg\, z_1 - \arg\, z_2,$ $\qquad \left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$

によって決まる.

(i) は

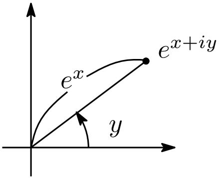


ということ

初等関数の導関数

複素指数関数

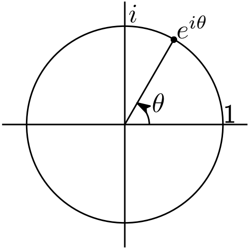
複素指数関数の定義



指数関数 e^x を拡張して複素数 $x+iy$ に対して**複素指数関数** e^{x+iy} を

$$e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$$

で定める。



とくに θ を実数とするとき

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \qquad \text{(Euler の公式)}$$

$$|e^{i\theta}| = 1, \quad \arg e^{i\theta} = \theta$$

初等関数の導関数

複素指数関数

複素指数関数の指数法則

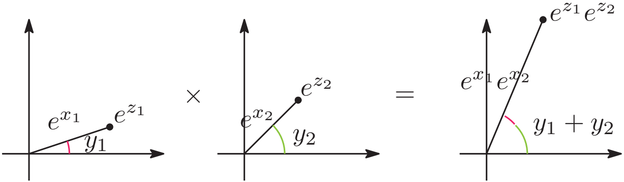
複素数 z_1, z_2 に対して

$$e^{z_1}e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$$

初等関数の導関数

複素指数関数

[確かめ]　$z_1 = x_1 + iy_1,\ z_2 = x_2 + iy_2$ とおく．



$$|e^{z_1}| = e^{x_1},\quad |e^{z_2}| = e^{x_2},\quad \arg e^{z_1} = y_1,\quad \arg e^{z_2} = y_2$$

だから回し伸ばしの原理により

$$\arg(e^{z_1}e^{z_2}) = \arg(e^{z_1}) + \arg(e^{z_2}) = y_1 + y_2$$

$$|e^{z_1}e^{z_2}| = |e^{z_1}||e^{z_2}| = e^{x_1}e^{x_2} = e^{x_1+x_2}$$

したがって

$$e^{z_1}e^{z_2} = e^{x_1+x_2}(\cos(y_1+y_2) + i\sin(y_1+y_2)) = e^{(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)} = e^{z_1+z_2}$$

初等関数の導関数

複素指数関数

複素指数関数の導関数

z を複素数の定数, t を実数の変数とするとき, 複素数値をとる関数 $f(t) = e^{zt}$ の導関数は

$$\frac{d}{dt}e^{zt} = ze^{zt}$$

ただし複素数値をとる関数の導関数は i を通常の定数と同じように扱って計算するものとする。

初等関数の導関数

複素指数関数

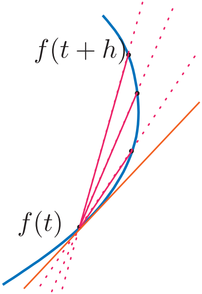
[確かめ] $z = x + iy$ とおく。$e^{zt} = e^{xt}(\cos(yt) + i\sin(yt))$ だから

$$
\begin{aligned}
\text{左辺} &= (e^{xt}\cos yt)' + i(e^{xt}\sin yt)' \\
&= (e^{xt})'\cos yt + e^{xt}(\cos yt)' + i(e^{xt})'\sin yt + i(e^{xt})(\sin yt)' \\
&= xe^{xt}\cos yt - ye^{xt}\sin yt + ix(e^{xt})\sin yt + iye^{xt}\cos yt \\
&= e^{xt}(x\cos yt - y\sin yt + xi\sin yt + iy\cos yt) \\
&= e^{xt}\left\{(x+iy)\cos yt + (ix-y)\sin yt\right\} \\
&= (x+iy)e^{xt}(\cos yt + i\sin yt) \\
&= \text{右辺}
\end{aligned}
$$

初等関数の導関数

複素指数関数

複素数値をとる関数の微分係数・導関数



t を実数の変数とし, $z=f(t)$ を複素数値をとる t の関数とする。

このとき $z=f(t)$ は t を動かすと複素平面において曲線を描く。これを $z=f(t)$ の軌跡という。

また

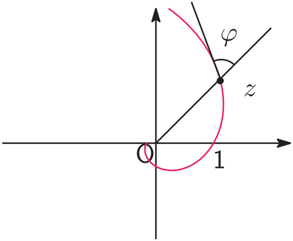
$$\frac{d}{dt}f(t)=\lim_{h\to 0}\frac{f(t+h)-f(t)}{h}$$

は $z=f(t)$ の軌跡の曲線の接線と同じ方向である。

初等関数の導関数

複素指数関数

対数らせん



$z = e^{(a+ib)t}$, $(a,\ b$ は実数の定数) の軌跡を対数らせんという。

対数らせんの接線は Oz とつねに一定の角で交わる。

[確かめ]　$r = |a+ib|$, $\varphi = \arg(a+ib)$ とおくと, $a+ib = re^{\varphi i}$ であり,

$$\frac{d}{dt}e^{(a+ib)t} = (a+ib)e^{(a+ib)t} = re^{\varphi i}e^{(a+ib)t}$$

だから 回し伸ばしの原理より $\frac{d}{dt}e^{(a+ib)t}$ は Oz を φ だけ回転し, r 倍したもの。

初等関数の導関数

複素指数関数