本日やること

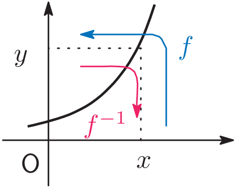
1. 初等関数の導関数
   - 逆関数の微分法
   - 指数関数・対数関数の導関数
   - 対数微分法

初等関数の導関数

逆関数の微分法

逆関数

$$
\begin{array}{ccc}
X & \xrightarrow{f} & Y \\
x & \longmapsto & y \\
 & y = f(x) &
\end{array}
$$



X : f の定義域
$Y = f(X)$: f の値域 のとき
関数 f が 1 対 1 であるとは
「$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2$」であること。
このとき

$$x = f^{-1}(y) \iff y = f(x)$$

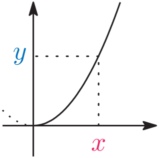
で決まる関数

$$f^{-1} : Y \to X$$

を f の逆関数という.

初等関数の導関数

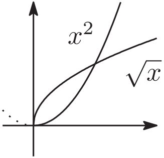
逆関数の微分法



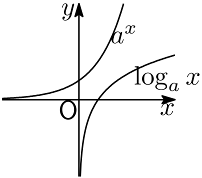
[例]

$y = x^2$, $(x \geqq 0)$ の逆関数は $x = \sqrt{y}$

変数 x, y をとりかえて $y = \sqrt{x}$ と表す必要は必ずしもない。



変数を取り換えて $y = \sqrt{x}$ とすると，二つの関数のグラフは $y = x$ に関して対称になる。



$a > 0$, $a \neq 1$ とする。

$y = a^x$ の逆関数は $x = \log_a y$, $(y > 0)$

変数を取り換えて $y = \log_a y$ とすると，二つの関数のグラフは $y = x$ に関して対称になる。

初等関数の導関数

逆関数の微分法

逆関数の微分法

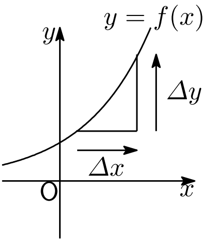
(i) 関数 $y = f(x)$ が区間 I で連続かつ狭義単調であるとすると逆関数が存在して連続である.

(ii) さらに $f(x)$ が I で微分可能で $f'(x) \neq 0$ ならば, 逆関数 $x = f^{-1}(y)$ も $f(I)$ で微分可能で次が成り立つ：

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\dfrac{dy}{dx}}$$

初等関数の導関数
逆関数の微分法

[確かめ]　(i) は省略。(ii) は



$\Delta x(\neq 0)$: x の増分

$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$: y の増分.

とすると

$$\Delta x = f^{-1}(y + \Delta y) - f^{-1}(y)$$

で f^{-1} は連続だから $\Delta y \to 0 \Rightarrow \Delta x \to 0$

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

だからここで $\Delta x, \Delta y \to 0$ とすると $\displaystyle \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$

初等関数の導関数

指数関数・対数関数の導関数

ネイピアの数 e

次の極限が存在する:

(i) $\displaystyle \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$

(ii) $\displaystyle \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

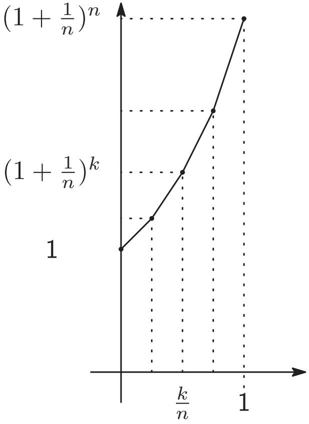
この極限の値 e はネイピアの数とよばれ, 無理数である。円周率 π と並んで最重要の定数である。

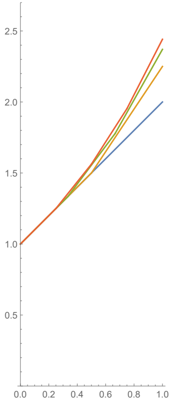
$$e = 2.718281828459\cdots$$

である。

初等関数の導関数

指数関数・対数関数の導関数





$n=1$ $\quad \left(1+\dfrac{1}{1}\right)^1 = 2$

$n=2$ $\quad \left(1+\dfrac{1}{2}\right)^2 = 2.25$

$n=3$ $\quad \left(1+\dfrac{1}{3}\right)^3 = 2.37037\cdots$

$n=4$ $\quad \left(1+\dfrac{1}{4}\right)^4 = 2.44141\cdots$

初等関数の導関数

指数関数・対数関数の導関数

以下 (i), (ii) を確かめる。

(Step 1) $0 < a \leqq b$ ならば $\dfrac{a}{b} \leqq \dfrac{a+1}{b+1}$。

初等関数の導関数

指数関数・対数関数の導関数

(Step 2) 数列 $\left\{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right\}$ は単調増加。なぜなら 2 項定理により

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k \left(\frac{1}{n}\right)^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{n(n-1)\times\cdots\times(n-k+1)}{k!\,n^k}$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n}\,\frac{n-1}{n} \times\cdots\times \frac{n-k+1}{n}\,\frac{1}{k!}$$

$$\leqq 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{n+1}{n+1} \times \frac{n+1-1}{n+1} \times\cdots\times \frac{n+1-k+1}{n+1} \times \frac{1}{k!}$$

$$\leqq 1 + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{n+1}{n+1} \times \frac{n}{n+1} \times\cdots\times \frac{n-k+2}{n+1} \times \frac{1}{k!}$$

$$= \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

初等関数の導関数

指数関数・対数関数の導関数

(Step 3) $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \leqq 3$. なぜなら $k=1,\dots,n$ のとき　$k! \geqq 2^{k-1}$ であるから

$$\begin{aligned}
\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= 1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!} \\
&\leqq 1+\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n}\,\frac{n-1}{n}\times\cdots\times\frac{n-k+1}{n}\,\frac{1}{k!} \\
&\leqq 1+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\right)=1+\frac{1-\dfrac{1}{2^n}}{1-\dfrac{1}{2}} \\
&< 1+\frac{1}{1-\dfrac{1}{2}}=3
\end{aligned}$$

(Step 4) 数列 $\left\{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right\}$ は有界かつ単調増加だから収束する。(教科書 47 ページまたはスライド第 1 回) これで (i) がわかった。

初等関数の導関数

指数関数・対数関数の導関数

(Step 5) $x \to +0$ の場合に (ii) を示す．$n \leqq \dfrac{1}{x} < n+1$ となる自然数 n をとる．
$t \mapsto (1+x)^t$ は t について単調増加であり $\dfrac{1}{n+1} < x \leqq \dfrac{1}{n}$ だから

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n < (1+x)^n \leqq (1+x)^{\frac{1}{x}} < (1+x)^{n+1} \leqq \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

である．ここで $x \to +0$ とすると $n \to \infty$ となるので

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{-1} \to e \times 1 = e,$$
$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right) \to e \times 1 = e$$

となる．したがって，はさみうちの原理により $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ も e に収束することがわかった．$x \to -0$ の場合は教科書 56 ページを見てください．

初等関数の導関数

指数関数・対数関数の導関数

自然対数・常用対数

$\log_e x$ は 自然対数と呼ばれ, 記号

$$\log x \text{ あるいは } \ln x$$

で表す.

これに対して 10 を底とする対数を常用対数と呼ぶ.

初等関数の導関数

指数関数・対数関数の導関数

定理 4.11　対数関数の導関数

(i) $(\log x)' = \dfrac{1}{x}, \quad (x > 0)$

(ii) $(\log |x|)' = \dfrac{1}{x}, \quad (x \neq 0)$

[(i) の確かめ]　左辺 $= \displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{\log(x+h) - \log x}{h}$ であり

$$\frac{\log(x+h) - \log x}{h} = \frac{1}{h} \log \frac{x+h}{x} = \frac{1}{x}\frac{x}{h} \log\left(1 + \frac{h}{x}\right)$$

$$= \frac{1}{x} \log\left\{\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}\right\} \to \frac{1}{x} \log e = \frac{1}{x}$$

初等関数の導関数

指数関数・対数関数の導関数

[(ii) の確かめ]　$x > 0$ のとき：$|x| = x$ であるから (i) と同じ。
$x < 0$ のとき：$t = -x$ とおくと $|x| = t > 0$ であるから合成関数の微分法により

$$(\log|x|)' = \frac{d\ \log t}{dt} \times \frac{dt}{dx} = \frac{1}{t} \times (-1) = \frac{1}{x}.$$

初等関数の導関数

指数関数・対数関数の導関数

定理 4.12　指数関数の導関数

$$(e^x)' = e^x$$

[確かめ]
$y = e^x$ とおく．$x = \log y$ であるから逆関数の微分法により

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\dfrac{dx}{dy}} = \frac{1}{\frac{d}{dy}\log y} = \frac{1}{\dfrac{1}{y}} = y = e^x,$$

初等関数の導関数

指数関数・対数関数の導関数

[例]

(i) $(e^{ax})' = ae^{ax} \quad (a$; 定数$)$

(ii) $(a^x)' = a^x \log a \quad (a$: 1 でない正の定数$)$

[(i) の確かめ] $ax = t$ とおき合成関数の微分法を使うと

左辺 $= \dfrac{d}{dx}e^{ax} = \dfrac{d}{dt}e^t \times \dfrac{dt}{dx}$

定理 4.12 より $\frac{d}{dt}e^t = e^t$ だから

$= e^t \times a = a\,e^{ax} =$ 右辺.

[(ii) の確かめ] $a = e^{\log a}$ だから $a^x = e^{x \log a}$. これと (i) により

左辺 $= e^{x \log a} \log a =$ 右辺

$(a^x)' = a^x$ となるのは $a = e$ のときだけである。

初等関数の導関数

対数微分法

定理 4.13　対数微分

関数 $f(x)$ が微分可能であるとき，

$$(\log|f(x)|)' = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

[確かめ]　$t = f(x)$ とおいて合成関数の微分法を使うと

$$\frac{d}{dx}\log|f(x)| = \left(\frac{d}{dt}\log|t|\right)\frac{dt}{dx} = \frac{1}{t}f'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

初等関数の導関数
対数微分法

[例]　$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$　(α：実数の定数) の証明。

$y = x^\alpha$ とおき両辺の対数をとると，

$$\log y = \log x^\alpha = \alpha \, \log x$$

両辺を x で微分すると

$$\frac{y'}{y} = \frac{\alpha}{x}$$

したがって

$$y' = \frac{\alpha}{x} \times y = \frac{\alpha}{x} \times x^\alpha = \alpha x^{\alpha-1}$$