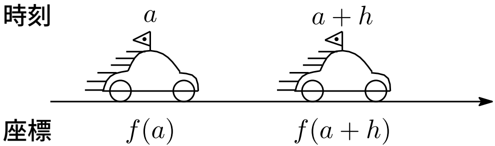
本日やること

1. 初等関数の導関数
   - 初等関数
   - べき関数の導関数
   - 定数倍・和の微分法
   - 積・商の微分法
   - 合成関数の微分法

復習：微分係数・導関数

復習：微分係数・導関数



$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$ a における微分係数　　a は定数

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$ 導関数　　x は変数

初等関数の導関数

初等関数

[初等関数]
$+$, $-$, $\times$, $\div$, $\sqrt[n]{\ }$, 三角関数, 逆三角関数, 指数関数, 対数関数を組み合わせて作られるような関数.（正式な定義ではない）

$$\frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right), \quad \frac{1}{2a}\log\left|\frac{x-a}{x+a}\right|, \quad \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right), \quad \log\left|x+\sqrt{A+x^2}\right|,$$

$$\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx + b\sin bx), \quad \frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\sin^{-1}\frac{x}{a}\right),$$

$$\frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+A}+A\log\left|x+\sqrt{x^2+A}\right|\right), \cdots$$

初等関数の導関数は初等関数。（これから確かめます）

初等関数の導関数

べき関数の導関数

$f(x) = x^{\alpha}$ (α は任意の実数の定数) で定義される関数を**べき関数**という.

定数関数の導関数

$f(x) = C$ (C : 定数) のとき $f'(x) = 0$ 　つまり

$(C)' = 0$ (C は定数)

[確かめ] $f(x) = C$ だから定義より

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{C - C}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0}{h} = 0.$$

初等関数の導関数

べき関数の導関数

x の導関数

$f(x) = x$ のとき $f'(x) = 1$ つまり

$$(x)' = 1$$

[確かめ] $f(x) = x$ だから $f(x+h) = x + h$ で

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h) - x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h} = \lim_{h \to 0} 1 = 1.$$

初等関数の導関数

べき関数の導関数

x^2 の導関数

$f(x) = x^2$ **のとき** $f'(x) = 2x$ **つまり**

$$(x^2)' = 2x$$

[確かめ] $f(x) = x^2$ **だから** $f(x+h) = (x+h)^2$ **で**

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{2xh + h^2}{h} = \lim_{h\to 0} (2x+h) = 2x. \end{aligned}$$

初等関数の導関数

べき関数の導関数

階乗・順列・組み合わせ

$n = 0, 1, 2, \cdots, \quad 0 \leqq k \leqq n$ に対して

$$n! = \begin{cases} 1, & n = 0 \text{ のとき}, \\ 1 \times 2 \times \cdots \times n, & n \geqq 1 \text{ のとき} \end{cases}$$

階乗

$${}_n\mathrm{P}_k = n(n-1)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

n 個のものから k 個取り出してならべる順列の数

$${}_n\mathrm{C}_k = \frac{{}_n\mathrm{P}_k}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

n 個のものから k 個取り出す組み合わせの数

初等関数の導関数

べき関数の導関数

二項定理

$$(a+b)^n = {}_n\mathrm{C}_n a^n + {}_n\mathrm{C}_{n-1} a^{n-1} b + \cdots + {}_n\mathrm{C}_0 b^n \quad = \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k\, a^{n-k} b^k$$

[確かめ]　$(a+b)^n$ を展開すると

$$\begin{array}{cccccc} (a+b) & (a+b) & (a+b) & \cdots & (a+b) & \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \cdots & \downarrow & \text{取り出す} \\ a & b & a & \cdots & a & \end{array}$$

のように各 $(a+b)$ から a, b の一方を取り出してかけ合わせたものの総和になる。

a を k 個 b を $n-k$ 個取り出す場合の数は ${}_n\mathrm{C}_k = \dfrac{n!}{(n-k)!k!}$ だから正しい。

初等関数の導関数

べき関数の導関数

x^n の導関数

$f(x) = x^n \ \ (n = 1, 2, \cdots)$ **のとき** $f'(x) = nx^{n-1}$ **つまり**

$$(x^n)' = nx^{n-1}, \quad n = 1, 2, \cdots$$

[確かめ] $f(x) = x^n$ **だから** $f(x+h) = (x+h)^n$. **ここで**

$$(x+h)^n = x^n + nx^{n-1}h + {}_n\mathrm{C}_2 x^{n-2}h^2 + \cdots + h^n$$

だから

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{nx^{n-1}h + (h\ \text{について 2 次以上の項})}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} (nx^{n-1} + (h\ \text{について 1 次以上の項})) = nx^{n-1}. \end{aligned}$$

初等関数の導関数

べき関数の導関数

$\dfrac{1}{x}$ の導関数

$f(x) = \dfrac{1}{x}$ のとき $f'(x) = \dfrac{-1}{x^2}$ 　つまり

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{-1}{x^2} \quad (x \neq 0 \text{ のとき})$$

[確かめ] $f(x) = \dfrac{1}{x}$ だから $f(x+h) = \dfrac{1}{x+h}$ で

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{1}{(x+h)} - \frac{1}{x}\right) \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{x-(x+h)}{x(x+h)}\right) = \lim_{h\to 0} \frac{-1}{x(x+h)} = -\frac{1}{x^2}. \end{aligned}$$

初等関数の導関数

べき関数の導関数

$\sqrt{x}$ の導関数

$f(x) = \sqrt{x}$ **のとき** $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ **つまり**

$$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad (x \neq 0 \text{ のとき})$$

[確かめ] $f(x) = \sqrt{x}$ だから $f(x+h) = \sqrt{x+h}$ で

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\sqrt{x+h} - \sqrt{x}\right) \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{(x+h) - x}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}\right) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

初等関数の導関数

べき関数の導関数

まとめると

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

$$(x^{-1})' = \left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{-1}{x^2} = (-1)x^{-2} = -1x^{-1-1}$$

$$\left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}$$

だから

べき関数の導関数

$f(x) = x^\alpha$ （α は定数）のような関数を**べき関数**という。**べき関数の導関数**は

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1} \quad \alpha\text{は実数の定数}$$

証明は後回しにします。

初等関数の導関数

べき関数の導関数

[例]

$$\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)' = \left(x^{-\frac{1}{2}}\right)' = -\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}-1} = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} = \frac{-1}{2\sqrt{x^3}}$$

初等関数の導関数

定数倍・和の微分法

定理 4.6 (定数倍・和の微分法)

$f(x),\ g(x)$ ：**微分可能**, k ：**定数** $\Rightarrow$ $kf(x),\ f(x)+g(x)$ **も微分可能で**

(i) $(kf(x))' = kf'(x)$

(ii) $(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x)$

[(ii) の確かめ]

$$
\begin{aligned}
\text{左辺} &= \lim_{h\to 0}\frac{(f(x+h)+g(x+h))-(f(x)+g(x))}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{(f(x+h)-f(x))+(g(x+h)-g(x))}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right) \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = \text{右辺}
\end{aligned}
$$

初等関数の導関数

定数倍・和の微分法

[例]

$$
\begin{aligned}
(2x^3+4x-3)' &= (2x^3)' + (4x)' + (-3)' \\
&= 2(x^3)' + 4(x)' + (-3)' \\
&= 2\times 3x^2 + 4\times 1 + 0 \\
&= 6x^2 + 4
\end{aligned}
$$

初等関数の導関数

積・商の微分法

定理 4.9 (積・商の微分法)

$f(x)$, $g(x)$ ：微分可能

$$\Rightarrow \quad f(x)g(x),\ \frac{f(x)}{g(x)}$$ も微分可能で (分母 $\neq 0$ である点で)

(i) $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ (積の微分法)

(ii) $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$ (商の微分法)

初等関数の導関数

積・商の微分法

[(i) の確かめ]

$$\begin{aligned}
&\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}\\
&\qquad=\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x+h)+f(x)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}\\
&\qquad=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}g(x+h)+f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}
\end{aligned}$$

ここで $\frac{(f(x+h)-f(x))}{h} \to f'(x)$, $\frac{g(x+h)-g(x)}{h} \to g'(x)$, $g(x+h) \to g(x)$ だから

$$\to f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

初等関数の導関数

[問題]:

$f(x) = (x^2+3x+2)^5$ のとき,

$$f'(x) = (2x+3)^5 \quad ?$$
$$f'(x) = 5(x^2+3x+2)^4 \quad ?$$
$$f'(x) = 5(2x+3)^4 \quad ?$$

どれも誤り!

初等関数の導関数

合成関数

合成関数の定義

関数 $t = g(x)$, $y = f(t)$ に対して

$$f \circ g(x) = f(g(x)), \quad x \in X$$

で決まる関数 $g \circ f$ を f, g の**合成関数**という.

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{g} & T & \xrightarrow{f} & Y \\ x & & t & & y \\ & t = g(x) & & y = f(t) & \end{array}$$

初等関数の導関数

合成関数の例

[合成関数の例]

$y = f(t)$, $t = g(x)$ の合成関数は $y = f(g(x))$.

$y = t^5$, $t = x^2 + 3x + 2$ の合成関数は $y = (x^2 + 3x + 2)^5$.

$y = \sqrt{t}$, $t = x^2 + 3x + 2$ の合成関数は $y = \sqrt{x^2 + 3x + 2}$.

$y = \sin t$, $t = x^2 + 3x + 2$ の合成関数は $y = \sin(x^2 + 3x + 2)$.

初等関数の導関数

合成関数の微分法

定理 4.7. 合成関数の微分法

$y = f(t),\ t = g(x)$ ：**微分可能** $\Rightarrow$ $y = f(g(x))$ ： **微分可能で**

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}, \qquad \Big(\text{または}\ (f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)\Big)$$

初等関数の導関数

合成関数の微分法

[確かめ]　導関数の定義より

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(g(x+\Delta x)) - f(g(x))}{\Delta x}$$

$$\frac{dy}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t+\Delta t)) - f(t)}{\Delta t}$$

$$\frac{dt}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}$$

である。

$$g(x+\Delta x) - g(x) = \Delta t, \quad f(t+\Delta t)) - f(t) = \Delta y$$

とすると $g(x+\Delta x) = g(x) + \Delta t = t + \Delta t$, $g(x) = t$ より
$f(g(x+\Delta x)) - f(g(x)) = \Delta y$ だから

$$\frac{f(g(x+\Delta x)) - f(g(x))}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}, \frac{f(t+\Delta t)) - f(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta y}{\Delta t}, \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} = \frac{\Delta t}{\Delta x}$$

初等関数の導関数

合成関数の微分法

$$x \quad \xmapsto{g} \quad t \quad \xmapsto{f} \quad y$$

増分:$\mathit{\Delta} x$　　増分:$\mathit{\Delta} t$　　増分:$\mathit{\Delta} y$

ここで

$$\frac{\mathit{\Delta} y}{\Delta x} = \frac{\mathit{\Delta} y}{\mathit{\Delta} t} \times \frac{\mathit{\Delta} t}{\Delta x}$$

であるが, $\mathit{\Delta} x \to 0$ とすると $\mathit{\Delta} t \to 0$ でもあるから

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\mathit{\Delta} x \to 0} \frac{\mathit{\Delta} y}{\Delta x} = \lim_{\mathit{\Delta} t \to 0} \frac{\mathit{\Delta} y}{\mathit{\Delta} t} \times \lim_{\mathit{\Delta} x \to 0} \frac{\mathit{\Delta} t}{\Delta x} = \frac{dy}{dt} \times \frac{dt}{dx}$$

初等関数の導関数

合成関数の微分法

[例題] (1) $f(x)=(x^2+3x+2)^5$ の導関数を求める。

$y=f(x)$, $t=x^2+3x+2$ とおく.

関数 $y=(x^2+3x+2)^5$ は関数 $y=t^5$, $t=x^2+3x+2$ の合成関数である.

$$\frac{dt}{dx}=\frac{d}{dx}(x^2+3x+2)=2x+3$$
$$\frac{dy}{dt}=\frac{d}{dt}(t^5)=5\,t^4$$

だから合成関数の微分法により

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}=5\,t^4\times(2x+3)=5(2x+3)(x^2+3x+2)^4$$

である.