本日やること

1. 連続関数
    - 連続関数の定義
    - 連続関数の性質

2. 微分係数・導関数
    - はやさと速度
    - 微分係数・導関数の定義
    - 微分係数とグラフの接線

連続関数

連続関数の定義

連続関数の定義

$f(x)$: 区間 I で定義された関数, $a \in I$ のとき

(i) $f(x)$ が $x = a$ で (または点 a で) 連続 $\Leftrightarrow$ $\displaystyle\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

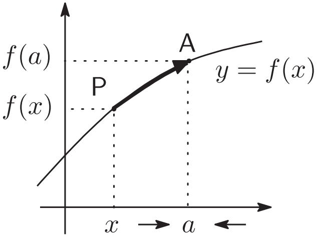
(a が区間の端点であるときは片側極限値を考える.)

(ii) $f(x)$ が 区間 I で連続 $\Leftrightarrow$ $f(x)$ が 区間 I の各点で連続

[連続でない関数の例] 教科書 58 ページを見よ。

連続関数

連続関数の性質



A$(a, f(a))$, P$(x, f(x))$ とする。
$f(x)$ が点 a で連続ならば

$$x \to a \ \Rightarrow \ f(x) \to f(a) \Rightarrow \ \mathrm{P} \to \mathrm{A}$$

だからグラフは点 A でつながっている。

$f(x), g(x)$ が (点でまたは区間で) 連続 $\Rightarrow$

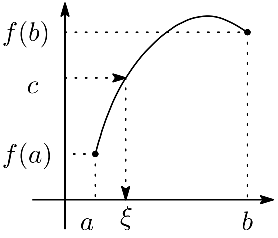
$$f(x) \pm g(x), f(x)g(x), \frac{f(x)}{g(x)} \text{ (分母} \neq 0 \text{ となる点で) も連続}$$

だから多項式関数, 有理関数は定義域で連続。
指数関数, 三角関数も作り方から連続であることがわかる。

連続関数

連続関数の性質

中間値の定理



関数 $f(x)$ が閉区間 $[a,b]$ で連続であり，さらに $f(a) < f(b)$ であるならば，$f(a) < c < f(b)$ であるようなどんな実数 c に対しても

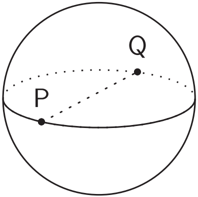
$$f(\xi) = c$$

を満たすような実数 ξ が区間 $[a,b]$ に少なくとも 1 つ存在する．$f(a) > f(b)$ であるときも同様である．

連続関数

連続関数の性質

[例題]



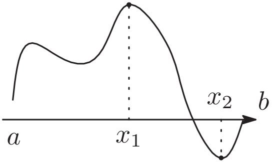
地球表面の気温分布は連続であるとする。赤道上の点 P とその裏側の点 Q で、気温が一致するものがあることを説明せよ。

連続関数

連続関数の性質

最大値最小値の定理

関数 $f(x)$ が有界閉区間 $[a, b]$ で連続であるならば $f(x)$ が最大値をとる点および最小値をとる点がこの区間に存在する.



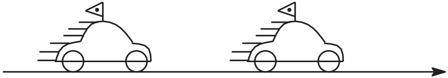
微分係数・導関数

はやさと速度

はやさと速度

はやさ $=$ $\dfrac{\text{みちのり}}{\text{かかったじかん}}$ を精密化する

時刻　t　$t+h$



座標　$f(t)$　$f(t+h)$

(時刻 t から $t+h$ までの) 平均の速度 $= \dfrac{f(t+h)-f(t)}{h}$

負の値も取りうることに注意

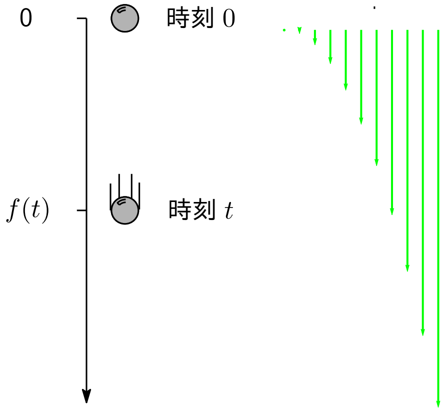
(時刻 t の) 瞬間の速度を $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(t+h)-f(t)}{h}$ で定める。

$\frac{0}{0}$ 型の不定形であることに注意

微分係数・導関数

はやさと速度

[どうして瞬間の速度を考えるのか・自由落下]



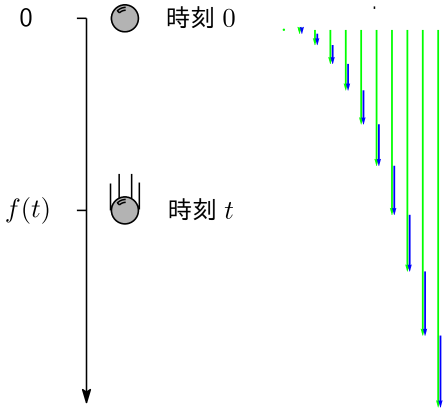
$$f(t) = \frac{1}{2}gt^2 \text{ (m)}$$

(g : 重力加速度)

微分係数・導関数

はやさと速度

[どうして瞬間の速度を考えるのか・自由落下]



$$f(t) = \frac{1}{2}gt^2 \ \text{(m)}$$

$(g$: 重力加速度$)$

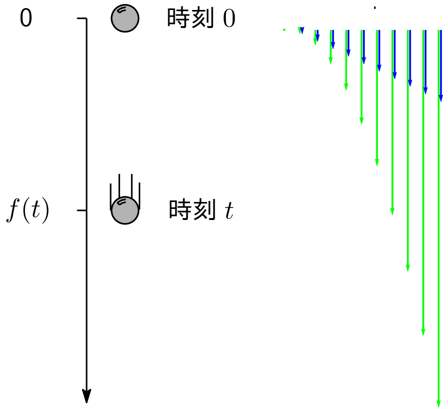
平均の速度

$$= \frac{\frac{1}{2}g(t+h)^2 - \frac{1}{2}gt^2}{h}$$

微分係数・導関数

はやさと速度

[どうして瞬間の速度を考えるのか・自由落下]



$$f(t) = \frac{1}{2}gt^2 \text{ (m)}$$

$(g$：重力加速度$)$

平均の速度

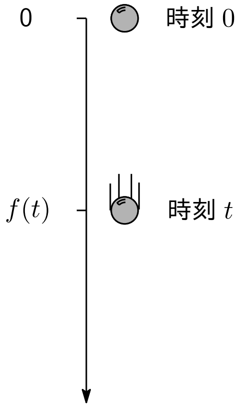
$$= \frac{\frac{1}{2}g(t+h)^2 - \frac{1}{2}gt^2}{h}$$

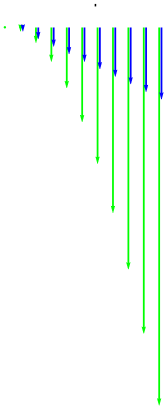
$$= gt + \frac{1}{2}gh$$

微分係数・導関数

はやさと速度

[どうして瞬間の速度を考えるのか・自由落下]





$$f(t) = \frac{1}{2}gt^2 \text{ (m)}$$

(g：重力加速度)

平均の速度

$$= \frac{\frac{1}{2}g(t+h)^2 - \frac{1}{2}gt^2}{h}$$

$$= gt + \frac{1}{2}gh$$

ここで $h \to 0$ として極限をとると

瞬間の速度 $v = gt$ (m/s)

がえられる。

微分係数・導関数

運動の法則

Newton の運動の法則 その 3 運動方程式

物体に力 $F(t)$ が働くときその物体には

$$F(t) = ma(t)$$

で決まる加速度 $a(t)$ が生じる.

今の場合 $a(t) = g$ (一定) だから一定の力 $F = mg$ で引っ張られていることになる。これが重力。

平均の速度は t に比例するとは言えないからこの法則は見えてこない。瞬間の速度を考えることが必要である。

微分係数・導関数

微分係数の定義

微分係数の定義

$f(x)$ が $x = a$ で (または点 a で) 微分可能であるとは

$$\Leftrightarrow \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \cdots (\star) \text{ が存在すること}$$

$(\star)$ を $f(x)$ の $x = a$ におけるまたは点 a における微分係数といい,

$$f'(a), \quad \frac{df}{dx}(a), \quad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a}, \cdots \text{で表す. つまり}$$

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

微分係数・導関数

導関数の定義

導関数の定義

$f(x)$ が 区間 I で微分可能であるとは，区間 I の各点で微分可能であること

このとき 関数 $x \mapsto f'(x)$ を，関数 $f(x)$ の導関数といい，記号

$$f', \quad f'(x), \quad (f(x))', \quad \frac{df}{dx}, \quad \frac{d}{dx}f(x), \quad y', \quad \frac{dy}{dx}$$

などで表す．つまり

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

微分係数・導関数

微分可能性と連続性

関数 $f(x)$ が点 a で微分可能 $\Rightarrow$ 点 a で連続

逆は成り立たない。

[確かめ]

$x \to a$ とするとき

$$f(x) - f(a) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \times (x - a) \to f'(a) \times 0$$

だから $f(x) \to f(a)$

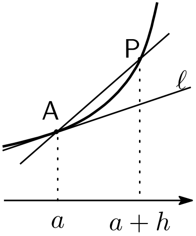
微分係数・導関数

微分係数とグラフの接線

微分係数とグラフの接線

$f(x)$ が点 a で微分可能 $\Rightarrow$ グラフは点 A$(a, f(a))$ で接線を持つ.
ただし接線とは A をとおり傾き $f'(a)$ の直線の事とする. 方程式は

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$



[確かめ] P$(a+h, f(a+h))$ とおく

AP の傾き $= \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} \cdots (\star)$

ℓ の傾き $= f'(a) \cdots (\star\star)$

$h \to 0$ とすると $(\star) \to (\star\star)$ だから AP$\to \ell$ と考えられる。したがって ℓ は接線。

微分係数・導関数

微分係数とグラフの接線

[例 4.2] 曲線 $y = x^2$ の点 $(1, 1)$ における接線を求める。
$f(x) = x^2$ とおく。$x = 1$ における微分係数は

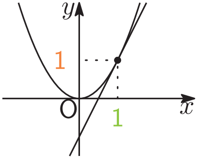
$$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(1+h)^2 - 1^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2h + h^2}{h}$$

$\frac{0}{0}$ 型の不定形であるが $h \neq 0$ としてよいから h で約分ができて

$$= \lim_{h \to 0} (2 + h) = 2$$

接線は $(1, 1)$ を通って傾き $f'(1) = 2$ の直線であるから方程式は

$$y - 1 = 2(x - 1)$$



整理して

$$y = 2x - 1$$