電気のための微分積分　第7回　解答

問題.1　次の関数の導関数を計算せよ.

(1) $y = x^3 - 3x^2 + 2x + 5$ のとき

$$y' = 3x^2 - 6x + 2$$

(2) $y = \dfrac{1}{2x}$ のとき $\dfrac{1}{x} = x^{-1}$ だから

$$y' = \left(\frac{1}{2}x^{-1}\right)' = \frac{1}{2}(-1)x^{-2} = -\frac{1}{2x^2}.$$

また $t = 2x$ とおいて合成関数の微分法を使うと

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{t}\right)\frac{d}{dx}(2x) = (-1)t^{-2} \times 2 = \frac{-2}{(2x)^2} = \frac{-1}{2x^2}$$

でもよい。

(3) $y = (x^2 + x + 1)^5$ のとき $t = x^2 + x + 1$ とおく.

関数 $y = (x^2 + x + 1)^5$ は関数 $y = t^5$, $t = x^2 + x + 1$ の合成関数である.

$$\frac{dt}{dx} = \frac{d}{dx}(x^2 + x + 1) = 2x + 1 \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(t^5) = 5\,t^4$$

だから合成関数の微分法により

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = 5\,t^4 \times (2x + 1) = 5(2x + 1)(x^2 + x + 1)^4$$

である.

$\dfrac{dy}{dx}$ は y を x で微分した導関数, $\dfrac{dy}{dt}$ は y を t で微分した導関数を表す. y' ではどちらで微分したのかわからないので, 3 つ以上の変数が現れる場合はこの記号は避けてください。

(4) $y = \dfrac{1}{x^2 + x + 1}$ のとき商の微分法により

$$\left(\frac{1}{x^2 + x + 1}\right)' = \frac{(1)' \times (x^2 + x + 1) - 1 \times (x^2 + x + 1)'}{(x^2 + x + 1)^2}$$

$$= \frac{0 \times (x^2 + x + 1) - 1 \times (2x + 1)}{(x^2 + x + 1)^2} = \frac{-(2x + 1)}{(x^2 + x + 1)^2}.$$

または $y=\dfrac{1}{t}$, $t=x^2+x+1$ の合成関数とみて合成関数の微分法を使うと

$$\frac{dt}{dx}=\frac{d}{dx}\left(x^2+x+1\right)=2x+1 \qquad \frac{dy}{dt}=\frac{d}{dt}\frac{1}{t}=-\frac{1}{t^2}$$

だから合成関数の微分法により

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}=-\frac{1}{t^2}\times(2x+1)=-\frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}$$

としてもよい.

(5) $y=\log(x^2+x+1)$ のとき $t=x^2+x+1$ とおく.

関数 $y=\log(x^2+x+1)$ は関数 $y=\log t$, $t=x^2+x+1$ の合成関数である.

$$\frac{dt}{dx}=\frac{d}{dx}(x^2+x+1)=2x+1, \qquad \frac{dy}{dt}=\frac{d}{dt}\log t=\frac{1}{t}$$

だから合成関数の微分法により

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}=\frac{1}{t}\times(2x+1)=\frac{2x+1}{x^2+x+1}$$

となる.

(6) $y=\sqrt{2x-1}$ のとき, $t=2x-1$ とおく. 関数 $y=\sqrt{2x-1}$ は関数 $y=\sqrt{t}$, $t=2x-1$ の合成関数である.

$$\frac{dt}{dx}=\frac{d}{dx}(2x-1)=2$$

でありまた

$$\frac{dy}{dt}=\frac{d}{dt}\left(t^{\frac{1}{2}}\right)=\frac{1}{2}t^{\frac{1}{2}-1}=\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{t}}.$$

である. だから合成関数の微分法により

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{t}}\times 2=\frac{1}{\sqrt{2x-1}}$$

となる.

(7) $y=e$. (e はネイピアの数) のとき $y'=0$. (定数関数だから)

(8) $y=e^x$ のとき

$$y'=e^x$$

微分しても変わらない関数はこの関数 (の定数倍) だけである。

(9) $y = e^{\cos x}$ のとき $t = \cos x$ とおく.

関数 $y = e^{\cos x}$ は関数 $y = e^t$, $t = \cos x$ の合成関数である.

$\dfrac{dt}{dx} = (\cos x)' = -\sin x, \qquad \dfrac{dy}{dt} = e^t$

だから合成関数の微分法により

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dt}\dfrac{dt}{dx} = e^t \times (-\sin x) = -\sin x\, e^{\cos x}$

となる.

(10) $y = x^e$ は変数 x のべき関数であるから x で微分すると $y' = ex^{e-1}$.

(11) $y = \cos x$ のとき $y' = -\sin x$.

(12) $y = \cos(3x-2)$ のとき $3x-2 = t$ とおくと $y = \cos(3x-2)$ は $y = \cos t$ と $t = 3x-2$ の合成関数となる.

$t = 3x-2$ より $\dfrac{dt}{dx} = 3$,

$y = \cos t$ より $\dfrac{dy}{dt} = -\sin t$

である. 合成関数の微分法により

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dt}\dfrac{dt}{dx} = 3(-\sin t) = -3\sin(3x-2)$.

(13) $y = \sqrt{x^2+4}$ のとき, $t = x^2+4$ とおく.

関数 $y = \sqrt{x^2+4}$ は関数 $y = \sqrt{t}$, $t = x^2+4$ の合成関数である.

$\dfrac{dt}{dx} = 2x$

であり, また

$\dfrac{dy}{dt} = (t^{\frac{1}{2}})' = \dfrac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2\sqrt{t}}$

である. だから合成関数の微分法により

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dt}\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{1}{2\sqrt{t}} \times 2x = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}}$.

(14) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+4}}$ のとき, $t = x^2+4$ とおく.

関数 $y=\sqrt{x^2+4}$ は関数 $y=\dfrac{1}{\sqrt{t}}$, $t=x^2+4$ の合成関数である.

$$\frac{dt}{dx}=2x$$

であり，また

$$\frac{dy}{dt}=(t^{-\frac{1}{2}})'=-\frac{1}{2}t^{-\frac{3}{2}}=\frac{-1}{2t^{\frac{3}{2}}}$$

である．だから合成関数の微分法により

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}=\frac{-1}{2t^{\frac{3}{2}}}\times 2x=\frac{-x}{(x^2+4)^{\frac{3}{2}}}.$$

問題.2 (1) $e^{(1+2i)x}$ の実部と虚部を書け。ただし i は虚数単位。

$$e^{(1+2i)x}=e^x(\cos(2x)+i\sin(2x))=e^x\cos(2x)+ie^x\sin(2x)$$

だから

$$\mathrm{Re}(e^{(1+2i)x})=e^x\cos(2x)$$

$$\mathrm{Im}(e^{(1+2i)x})=e^x\sin(2x)$$

(2) $y=e^{(1+2i)x}$ の導関数を求めよ。

$y'=(1+2i)\,e^{(1+2i)x}$ (第 6 回を見よ)

(3) 積の微分法を使って $y=e^x\cos(2x)$ の導関数を求めよ。

$$(e^x\cos(2x))'=(e^x)'\cos(2x)+e^x(\cos(2x))'=e^x\cos(2x)-2e^x\sin(2x).$$

(4) 積の微分法を使って $y=e^x\sin(2x)$ の導関数を求めよ。

$$(e^x\sin(2x))'=(e^x)'\sin(2x)+e^x(\sin(2x))'=e^x\sin(2x)+2e^x\cos(2x).$$

(5) $y=e^{(1+2i)x}$ の導関数は

$(e^x\cos(2x)$ の導関数 $)+i(e^x\sin(2x)$ の導関数$)$

に等しいことを確かめよ。

$$\begin{aligned}(1+2i)\,e^{(1+2i)x}&=(1+2i)\,e^x(\cos(2x)+i\sin(2x))\\&=e^x(\cos(2x)-2\sin(2x))+ie^x(\sin(2x)+2\cos(2x))\end{aligned}$$

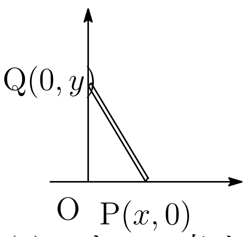
だから正しい。

一般に関数 $f(x)$ の実部を $g(x)$, 虚部を $h(x)$ とするとき

$$f'(x) = g'(x) + ih'(t)$$

である。

問題.3 図のように壁に長さ 1(m) の板が立てかけてある。床に接する点を P, 壁に接する点を Q とし, その座標をそれぞれ $(x, 0)$, $(0, y)$ とする。板が床をすべりながら倒れるものとすると x, y は時刻 t の関数となるので $x(t)$, $y(t)$ と書くことにする。時刻 t での P の速度を $v_x(t)$, Q の速度を $v_y(t)$ とする。



(1) y を x で表せ。

直角三角形 OPQ に三平方の定理を適用すると $\mathrm{PQ}^2 = \mathrm{OP}^2 + \mathrm{OQ}^2$ だから $\mathrm{OQ}^2 = \mathrm{PQ}^2 - \mathrm{OP}^2 = 1 - x^2$ したがって $y = \sqrt{1-x^2})$

(2) $v_x(t)$, $v_y(t)$ を x, y で表せ。

$$v_x(t) = \frac{d}{dt}x(t)(= x'(t) \text{ も可}), \quad v_y(t) = \frac{d}{dt}y(t)(= y'(t) \text{ も可}).$$

(3) $v_x(t)$ と $v_y(t)$ の関係を調べよ。

(1) より $y = \sqrt{1-x^2}$ であるが, この両辺を t で微分すればよい。

左辺の導関数 $= \dfrac{dy}{dt} = v_y$,

右辺の導関数 $= \dfrac{d}{dt}(\sqrt{1-x^2}) = \dfrac{d}{dx}(\sqrt{1-x^2})\dfrac{dx}{dt} \cdots (\star)$

ここで $s = 1 - x^2$ とおくと $\sqrt{1-x^2} = \sqrt{s}$ だから

$$\frac{d}{ds}\sqrt{s} = \frac{1}{2\sqrt{s}}, \quad \frac{ds}{dx} = \frac{d}{dx}(1-x^2) = -2x$$

合成関数の微分法により

$$\frac{d}{dx}\sqrt{1-x^2} = \frac{d}{ds}\sqrt{s}\frac{ds}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{s}}(-2x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

したがって

$$(\star) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}v_x$$

したがって

$$v_y = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}v_x$$

2 年前試験に出して一人だけできました。