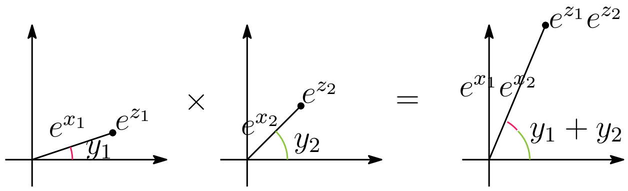
電気のための微分積分　第6回　解答

問題.1　(1)　複素数 z_1, z_2 に対して　$e^{z_1}e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$　であることを示せ。

$z_1 = x_1 + iy_1,\ z_2 = x_2 + iy_2$ とおく.



$$|e^{z_1}| = e^{x_1},\quad |e^{z_2}| = e^{x_2},\quad \arg e^{z_1} = y_1,\quad \arg e^{z_2} = y_2$$

だから回し伸ばしの原理により

$$\arg(e^{z_1}e^{z_2}) = \arg(e^{z_1}) + \arg(e^{z_2}) = y_1 + y_2$$

$$|e^{z_1}e^{z_2}| = |e^{z_1}||e^{z_2}| = e^{x_1}e^{x_2} = e^{x_1+x_2}$$

したがって

$$e^{z_1}e^{z_2} = e^{x_1+x_2}(\cos(y_1+y_2) + i\sin(y_1+y_2)) = e^{(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)} = e^{z_1+z_2}$$

(2)　z を複素数の定数, t を実数の変数とするとき,　$\dfrac{d}{dt}e^{zt} = ze^{zt}$　であることを確かめよ。ただし複素数値をとる関数の導関数は i を通常の定数と同じように扱って計算するものとする。

$z = x + iy$ とおく。$e^{zt} = e^{xt}(\cos(yt) + i\sin(yt))$ だから

$$\begin{aligned}
\text{左辺} &= (e^{xt}\cos yt)' + i(e^{xt}\sin yt)' \\
&= (e^{xt})'\cos yt + e^{xt}(\cos yt)' + i(e^{xt})'\sin yt + i(e^{xt})(\sin yt)' \\
&= xe^{xt}\cos yt - ye^{xt}\sin yt + ix(e^{xt})\sin yt + iye^{xt}\cos yt \\
&= e^{xt}(x\cos yt - y\sin yt + xi\sin yt + iy\cos yt) \\
&= e^{xt}\left\{(x+iy)\cos yt + (ix - y)\sin yt\right\} \\
&= (x+iy)e^{xt}(\cos yt + i\sin yt) \\
&= \text{右辺}
\end{aligned}$$

問題.2　(1) $e^{\frac{\pi}{3}i},\ e^{\frac{\pi}{6}i},\ e^{\frac{\pi}{3}i} \times e^{\frac{\pi}{6}i}$, を複素数平面に図示せよ.

$$e^{\frac{\pi}{3}i} = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \text{ だから } x\text{ 座標} = \frac{1}{2}$$

$|e^{\frac{\pi}{3}i}| = \cos^2\frac{\pi}{3} + \sin^2\frac{\pi}{3} = 1$ だから単位円周上にある。

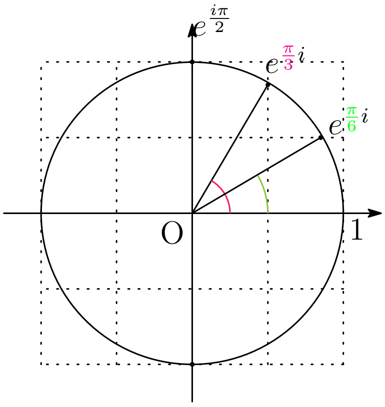
$e^{\frac{\pi}{6}i} = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$ だから y 座標 $= \frac{1}{2}$

$|e^{\frac{\pi}{6}i}| = \cos^2\frac{\pi}{6} + \sin^2\frac{\pi}{6} = 1$ だから単位円周上にある。

$e^{\frac{\pi}{2}i} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i$

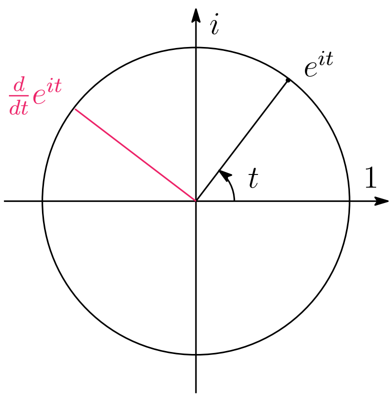
複素指数法則により

$e^{\frac{\pi}{3}i} \times e^{\frac{\pi}{6}i} = e^{\left(\frac{\pi}{3}i+\frac{\pi}{6}i\right)} = e^{\frac{\pi}{2}i}$ に注意せよ.



(2) 実数 t を動かした時の e^{it} の軌跡を図示せよ.

$e^{it} = \cos t + i\sin t$ は絶対値 1, 偏角 t の複素数であるから, 図のように原点中心半径 1 の円周上にある.



(3) $\frac{d}{dt}e^{it}$ を計算し、図中に書き入れよ。

z が複素定数であるとき $\frac{d}{dt}e^{zt} = ze^{zt}$ であるから

$$\frac{d}{dt}e^{it} = ie^{it} = e^{\frac{\pi}{2}i}e^{it} = e^{i(t+\frac{\pi}{2})}$$

で, e^{it} を $\dfrac{\pi}{2}$ ラジアン回転したものになる。(速度ベクトルと同じもの。)

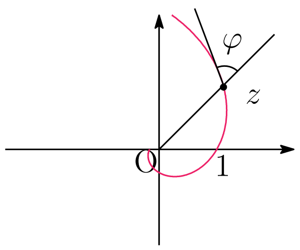
(4) $\dfrac{d}{dt}e^{\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)t}$ を計算し、$e^{(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)t}$ との関係を調べよ。

(3) と同様に

$$\frac{d}{dt}e^{(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)t} = (\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)e^{(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)t} = e^{\frac{\pi}{3}i}e^{(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)t}$$

で, $e^{(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)t}$ を $\dfrac{\pi}{3}$ ラジアン回転したものになる。

(5) 実数 t を動かした時の $e^{(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)t}$ の軌跡がどうなるか考えよ。



図の角は常に $\dfrac{\pi}{3}$

問題.3 複素数値関数 $f(x)$ に対して

$$\Big(\mathbf{Re}f(x)\Big)' = \mathbf{Re}\,(f'(x)) \cdots (\star), \quad \Big(\mathbf{Im}f(x)\Big)' = \mathbf{Im}\,(f'(x))$$

であることを利用して次の関数の導関数を計算せよ。

$(\star)$ を確かめておこう。

$$f(x) = \mathbf{Re}f(x) + i\mathbf{Im}f(x)$$

だから

$$(f(x))' = (\mathbf{Re}f(x))' + i\,(\mathbf{Im}f(x))'$$

ここで $(\mathbf{Re}f(x))'$ と $(\mathbf{Re}f(x))'$ は実数値だから

$$\mathbf{Re}(f(x))' = (\mathbf{Re}f(x))'$$
$$\mathbf{Im}(f(x))' = (\mathbf{Im}f(x))'$$

(1)　$y = e^{2x}\cos(3x) = \mathbf{Re}(e^{(2+3i)x})$ だから

$$y' = \left(\mathbf{Re}(e^{(2+3i)x})\right)' = \mathbf{Re}\left((e^{(2+3i)x})'\right) = \mathbf{Re}\left((2+3i)\,e^{(2+3i)x}\right)$$
$$= e^{2x}\mathbf{Re}\left((2+3i)\left(\cos(3x)+i\sin(3x)\right)\right) = e^{2x}\left((2\cos(3x)-3\sin(3x)\right))$$

積の微分法を使うより少し楽である。？

(2)　$y = e^{2x}\sin(3x) = \mathbf{Im}(e^{(2+3i)x})$ だから

$$y' = \left(\mathbf{Im}(e^{(2+3i)x})\right)' = \mathbf{Im}\left((e^{(2+3i)x})'\right) = \mathbf{Im}\left((2+3i)\,e^{(2+3i)x}\right)$$
$$= e^{2x}\mathbf{Im}\left((2+3i)\left(\cos(3x)+i\sin(3x)\right)\right) = e^{2x}\left((3\cos(3x)+2\sin(3x)\right))$$

(3)　$y = \dfrac{\cos x + i\sin x}{\cos x - i\sin x} = \dfrac{\cos x + i\sin x}{\cos(-x) + i\sin(-x)} = \dfrac{e^{ix}}{e^{-ix}} = e^{ix-(-ix)} = e^{2ix}$

だから

$y' = 2ie^{2ix} = 2i(\cos 2x + i\sin 2x)$

追加

(4)　$y = \dfrac{1}{e^{2x}\cos(3x)}$ のとき

$y' = -\dfrac{1}{(e^{2x}\cos(3x))^2}(e^{2x}\cos(3x))' = -\dfrac{1}{(e^{2x}\cos(3x))^2}e^{2x}\left((2\cos(3x)-3\sin(3x)\right)) =$
$-e^{-2x}\dfrac{2\cos(3x)-3\sin(3x)}{\cos^2(3x)}$

(5)　$y = \dfrac{\sin x - x\cos x}{x\sin x + \cos x}$ のとき

$$\begin{aligned}
y' &= \frac{(\sin x - x\cos x)'(x\sin x + \cos x) - (\sin x - x\cos x)(x\sin x + \cos x)'}{(x\sin x + \cos x)^2} \\
&= \frac{(x\sin x)(x\sin x + \cos x) - (\sin x - x\cos x)(x\cos x)}{(x\sin x + \cos x)^2} \\
&= \frac{x^2\sin^2 x + x\sin x\cos x - x\sin x\cos x + x^2\cos^2 x}{(x\sin x + \cos x)^2} \\
&= \frac{x^2}{(x\sin x + \cos x)^2}
\end{aligned}$$