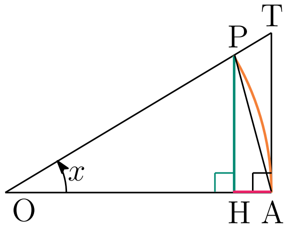
電気のための微分積分　第5回　解答

問題.1　(1)

$$\frac{1-\cos x}{x} = \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x(1+\cos x)} = \frac{1-\cos^2 x}{x(1+\cos x)} = \frac{\sin x}{x}\frac{\sin x}{1+\cos x}$$

だから $x \to 0$ とすると $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1 \cdots (\star)$ により

$\to 1 \times \frac{0}{2} = 0.$



(2) $(\sin x)' = \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$ であるが sin の加法定理により

$$\begin{aligned}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} &= \frac{\sin x\cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h} \\ &= \sin x\frac{\cos h - 1}{h} + \cos x\frac{\sin h}{h}\end{aligned}$$

ここで $h \to 0$ とすると $(\star)$, (1) により

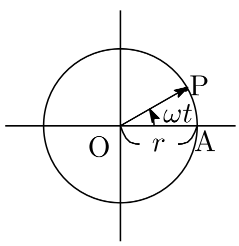
$$\to \cos x$$

だから

$$(\sin x)' = \cos x$$

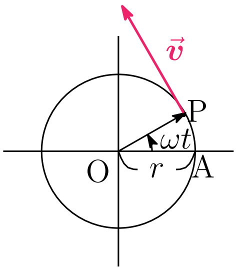
問題.2　点 P は原点中心半径 r の円周上を, 時刻 0 で点 $\mathrm{A}(r,0)$ を出発し角速度 ω で等速円運動している.

(1) このとき, 時刻 t における P の座標を t を用いて表せ.



角速度が ω だから P は時刻 t には円周上を A から ωt ラジアン回転したところに来る. だから $(r\cos\omega t, r\sin\omega t)$ である.

(2) 時刻 t の時の P の速度ベクトル $\vec{v}(t)$ を求めよ。



速度ベクトルの成分表示は P の座標をそれぞれ微分すれば得られるから

$$\vec{v}(t) = ((r\cos\omega t)', (r\sin\omega t)') = (-r\omega\sin\omega t, r\omega\cos\omega t)$$

問題.3 (1) $y = \sin(3x-2)$ のとき $3x-2=t$ とおくと $y = \sin(3x-2)$ は $y = \sin t$ と $t = 3x-2$ の合成関数となる.

$t = 3x-2$ より $\dfrac{dt}{dx} = 3,$

$y = \sin t$ より $\dfrac{dy}{dt} = \cos t$

である. 合成関数の微分法により

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = 3\cos t = 3\cos(3x-2).$$

(2) $y = \cos(3x-2)$ のとき, $3x-2=t$ とおくと $y = \cos(3x-2)$ は $y = \cos t$ と $t = 3x-2$ の合成関数となる.

$t = 3x-2$ より $\dfrac{dt}{dx} = 3,$

$y = \cos t$ より $\dfrac{dy}{dt} = -\sin t$

である. 合成関数の微分法により

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = 3(-\sin t) = -3\sin(3x-2).$$

(3) $y = \sin(x^2+1)$ のとき $x^2+1=t$ とおくと関数 $y = \sin(x^2+1)$ は関数 $y = \sin t$, $t = x^2+1$ の合成関数となる.

$t = x^2+1$ より $\dfrac{dt}{dx} = 2x,$

$y = \sin t$ より $\dfrac{dy}{dt} = \cos t$

である. 合成関数の微分法により

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}=2x\cos t=2x\cos(x^2+1).$$

(4) $y=\cos(x^2+1)$ のとき $x^2+1=t$ とおくと

$$\frac{dt}{dx}=2x$$

であり，また $y=\cos t$ だから

$$\frac{dy}{dt}=-\sin t$$

である．関数 $y=\cos(x^2+1)$ は関数 $y=\cos t$, $t=x^2+1$ の合成関数であるから合成関数の微分法により

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}=2x(-\sin t)=-2x\sin(x^2+1).$$

(5) $y=\tan(3x-2)$ のとき，$3x-2=t$ とおくと

$y=\tan t$ だから

$$\frac{dy}{dt}=\frac{1}{\cos^2 t}$$

である．あとは (1) と同様に

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}=3\frac{1}{\cos^2 t}=\frac{3}{\cos^2(3x-2)}.$$

(6) $y=\cos^3(3x-2)$ のとき，

$3x-2=t$, $\cos(3x-2)=s$ とおくと $y=s^3$, $s=\cos t$ だから $y=\cos^3(3x-2)$ は

$$y=s^3,\ s=\cos t,\quad t=3x-2,$$

の合成関数である．

$$\frac{dy}{ds}=3s^2,\quad \frac{ds}{dt}=-\sin t,\quad \frac{dt}{dx}=3$$

だから合成関数の微分法（3 つ以上の関数の合成の場合にも使える）により

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{ds}\frac{ds}{dt}\frac{dt}{dx}=3s^2\times(-\sin t)\times 3=-9\sin(3x-2)\cos^2(3x-2).$$

図式的に書くと

$$\begin{array}{ccccccc} x & \longmapsto & t & \longmapsto & s & \longmapsto & y \\ & & \| & & \| & & \| \\ & & 3x-2 & & \cos t & & s^3 \end{array}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dt}{dx} \times \frac{ds}{dt} \times \frac{dy}{ds}$$

(7) $y = \cos\left((3x-2)^3\right)$ のとき,

$3x-2 = t$, $(3x-2)^3 = s$ とおくと $y = \cos s$, $s = t^3$ だから $y = \cos\left((3x-2)^3\right)$ は

$$y = \cos s,\ s = t^3,\quad t = 3x-2,$$

の合成関数である.

$$\frac{dy}{ds} = -\sin s,\quad \frac{ds}{dt} = 3t^2,\quad \frac{dt}{dx} = 3$$

だから合成関数の微分法（3 つ以上の関数の合成の場合にも使える）により

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{ds}\frac{ds}{dt}\frac{dt}{dx} = -\sin s \times 3t^2 \times 3 = -9\sin\left((3x-2)^3\right)\ (3x-2)^2.$$

図式的に書くと

$$\begin{array}{ccccccc} x & \longmapsto & t & \longmapsto & s & \longmapsto & y \\ & & \| & & \| & & \| \\ & & 3x-2 & & t^3 & & \cos s \end{array}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dt}{dx} \times \frac{ds}{dt} \times \frac{dy}{ds}$$

(8) 商の微分法により

$$\left(\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'(1+\cos x) - \sin x(1+\cos x)'}{(1+\cos x)^2}$$

$$= \frac{\cos x(1+\cos x) - \sin x(-\sin x)}{(1+\cos x)^2} = \frac{\cos x + 1}{(1+\cos x)^2} = \frac{1}{\cos x + 1}.$$

(9) $y = e^{\sin x}$, $t = \sin x$ とおく.

関数 $y = e^{\sin x}$ は関数 $t = \sin x$, $y = e^t$ の合成関数である.

$$\frac{dt}{dx} = \cos x$$

$$\frac{dy}{dt} = e^t$$

だから合成関数の微分法により

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dt}{dx}\frac{dy}{dt} = \cos x \times e^t = e^{\sin x}\cos x$$

となる.

(10) $y = \log(\cos x)$, $t = \cos x$ とおく.

関数 $y = \log(\cos x)$ は関数 $t = \cos x$, $y = \log t$ の合成関数である.

$$\frac{dt}{dx} = -\sin x$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{t}$$

だから合成関数の微分法により

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dt}{dx}\frac{dy}{dt} = -\sin x \times \frac{1}{t} = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\tan x$$

となる.

(11) 積の微分法により

$$(e^{2x}\cos 3x)' = (e^{2x})'\cos 3x + e^{2x}(\cos 3x)' = 2\,e^{2x}\ \cos 3x - 3\,e^{2x}\ \sin 3x.$$

(12) $y = x\cos x$ のとき積の微分法により

$$y' = (x)'\cos x + x(\cos x)' = \cos x + x(-\sin x) = \cos x - x\sin x$$

(13) $y = \dfrac{1+\cos x}{1-\sin x}$ のとき, 商の微分法により

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(1+\cos x)'(1-\sin x) - (1+\cos x)(1-\sin x)'}{(1-\sin x)^2} \\ &= \frac{-\sin x(1-\sin x) - (1+\cos x)(-\cos x)}{(1-\sin x)^2} \\ &= \frac{\sin^2 x + \cos^2 x - \sin x + \cos x}{(1-\sin x)^2} = \frac{1-\sin x+\cos x}{(1-\sin x)^2} \end{aligned}$$

(14) $t = \dfrac{x}{a}$ とおく.

関数 $y = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}$ は関数 $y = \frac{1}{a}\tan^{-1} t$, $t = \frac{x}{a}$ の合成関数である.

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{a}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{a}\frac{1}{1+t^2}$$

だから合成関数の微分法により

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dt}{dx}\frac{dy}{dt} = \frac{1}{a} \times \frac{1}{a}\frac{1}{1+t^2} = \frac{1}{a^2}\frac{1}{1+\frac{x^2}{a^2}} = \frac{1}{a^2+x^2}$$

となる.