# 電気のための微分積分　第4回　解答

サポーター各位 (15), (16), (17) はできていなくともよいことにします。授業が間に合わなかったので。

## 問題 1.

(1)　$y = e^x$

$(\log y)' = \dfrac{1}{y}$ から導く。$y = e^x$ は $x = \log y$ の逆関数であるから逆関数の微分法により

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\dfrac{dx}{dy}} = \frac{1}{\frac{d}{dy}\log y} = \frac{1}{\dfrac{1}{y}} = y = e^x,$$

(2)　$y = \log x$ の導関数は $t \to 0$ のとき $(1+t)^{\frac{1}{t}} \to e$ であることを使う

$$\frac{\log(x+h) - \log x}{h} = \frac{1}{h}\log\frac{x+h}{x} = \frac{1}{x}\frac{x}{h}\log\left(1 + \frac{h}{x}\right)$$
$$= \frac{1}{x}\log\left\{\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}\right\}$$

ここで $t = \frac{h}{x}$ とおくと $t \to 0$ だから

$$= \frac{1}{x}\log\left\{(1+t)^{\frac{1}{t}}\right\} \to \frac{1}{x}\log e = \frac{1}{x}$$

だから $y' = \dfrac{1}{x}$

(3)　$y = e^{ax}$ のとき $t = ax$ とおく.

関数 $y = e^{ax}$ は関数 $y = e^t$, $t = ax$ の合成関数である.

$\dfrac{dt}{dx} = a,$　　また (1) より $\dfrac{dy}{dt} = e^t$

だから合成関数の微分法により

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = e^t \times a = a\,e^{ax}$$

となる.

(4)　$y = \log(ax)$ のとき $t = ax$ とおく.

関数 $y = \log(ax)$ は関数 $y = \log t$, $t = ax$ の合成関数である.

$\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{d}{dx}(ax) = a,$ 　　また (2) より $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{d}{dt}\log t = \dfrac{1}{t}$

だから合成関数の微分法により

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{1}{t} \times a = \frac{1}{x}$$

となる.

$(\log(ax))' = (\log x)'$

であって不思議な気がするかもしれないが,

$\log(ax) = \log a + \log x$

であるから導関数が一致するのは当然である.

(5) 積の微分法と (3) により

$(xe^{3x})' = (x)'e^{3x} + x(e^{3x})' = e^{3x} + x(3e^{3x}) = (1+3x)\,e^{3x}.$

(6) $y = e^{x^2+2x}$ のとき $t = x^2 + 2x$ とおく.

関数 $y = e^{x^2+2x}$ は関数 $y = e^t$, $t = x^2 + 2x$ の合成関数である.

$\dfrac{dt}{dx} = 2x + 2,$ 　　$\dfrac{dy}{dt} = e^t$

だから合成関数の微分法により

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = e^t \times (2x+2) = (2x+2)\,e^{x^2+2x}$$

となる.

(7) $-1 < x < 1$ としてください。 $y = e^{\frac{-1}{1-x^2}}$, $t = \frac{-1}{1-x^2}$, $s = 1 - x^2$ とおく.

関数 $y = e^{\frac{-1}{1-x^2}}$ は関数 $s = 1 - x^2$, $t = \dfrac{-1}{s}$, $y = e^t$ の合成関数である.

$$\frac{ds}{dx} = -2x$$

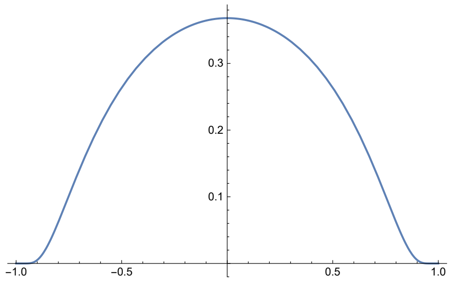
$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{s^2}$$

$$\frac{dy}{dt} = e^t$$

である. だから合成関数の微分法により

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ds}{dx}\frac{dt}{ds}\frac{dy}{dt} = -2x \times \frac{1}{s^2} \times e^t = \frac{-2x}{(1-x^2)^2}e^{\frac{-1}{1-x^2}}$$

となる．合成関数の微分法は，このように 3 個の関数の合成のときも使ってよい。




(8)　$y = \log(x^2+1)$, $t = x^2+1$ とおく．

関数 $y = \log(x^2+1)$ は関数 $t = x^2+1$, $y = \log t$ の合成関数である．

$$\frac{dt}{dx} = 2x$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{t}$$

である．だから合成関数の微分法により

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dt}{dx}\frac{dy}{dt} = 2x \times \frac{1}{t} = \frac{2x}{x^2+1}$$

となる．

(9) $y = \log|x+\sqrt{x^2+1}|$, $t = x+\sqrt{x^2+1}$ とおく．

関数 $y = \log|x+\sqrt{x^2+1}|$ は関数 $y = \log|t|$, $t = x+\sqrt{x^2+1}$ の合成関数である．

まず $(\sqrt{x^2+1})'$ を計算しよう。$z = \sqrt{x^2+1}$ とおくと $t = x+z$ であるが，ここで $s = x^2+1$ とおくと $z = \sqrt{x^2+1}$ は $z = \sqrt{s}$, $s = x^2+1$ の合成関数であり，合成関数の微分法により

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{ds}\frac{ds}{dx} = \frac{d}{ds}\sqrt{s}\frac{d}{dx}(x^2+1) = \frac{1}{2\sqrt{s}}2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

である。(これが大事な導関数である。)

再び $y, t$ にもどると

$$\frac{dt}{dx} = \frac{d}{dx}(x+z) = 1 + \frac{dz}{dx} = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{t}$$

だから合成関数の微分法により

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}=\frac{1}{t}\times\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)=\frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}}=\frac{\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)\times\sqrt{x^2+1}}{(x+\sqrt{x^2+1})\times\sqrt{x^2+1}}$$
$$=\frac{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{(x+\sqrt{x^2+1})\times\sqrt{x^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$
となる.

(10) $y=\dfrac{1}{2a}\log\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right|$ のとき $t=\dfrac{x-a}{x+a}$ とおくと $y=\dfrac{1}{2a}\log\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right|$ は $y=\dfrac{1}{2a}\log|t|,\ t=\dfrac{x-a}{x+a}$ の合成関数になる。

$$\frac{dt}{dx}=\left(\frac{x-a}{x+a}\right)'=\frac{(x-a)'(x+a)-(x-a)(x+a)'}{(x+a)^2}=\frac{2a}{(x+a)^2}$$
$$\frac{dy}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2a}\log|t|\right)=\frac{1}{2at}$$
である. だから合成関数の微分法により
$$\frac{dy}{dx}=\frac{dt}{dx}\frac{dy}{dt}=\frac{2a}{(x+a)^2}\times\frac{1}{2at}=\frac{1}{(x+a)(x-a)}$$
となる.

(11) $y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ のとき

$$y'=\frac{1}{2}((e^x)'-(e^{-x})')=\frac{1}{2}(e^x-(-e^{-x}))=\cosh x$$

(12) $y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ のとき

$$y'=\frac{1}{2}((e^x)'+(e^{-x})')=\frac{1}{2}(e^x+(-e^{-x}))=\sinh x$$

(13) $y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ $\Big($ これを $\tanh x$ と書く。$\Big)$ のとき商の微分法により

$$\left(\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\right)'=\frac{(e^x-e^{-x})'(e^x+e^{-x})-(e^x-e^{-x})(e^x+e^{-x})'}{(e^x+e^{-x})^2}$$
$$=\frac{(e^x+e^{-x})(e^x+e^{-x})-(e^x-e^{-x})(e^x-e^{-x})}{(e^x+e^{-x})^2}=\frac{(e^x+e^{-x})^2-(e^x-e^{-x})^2}{(e^x+e^{-x})^2}$$
$$=\frac{4}{(e^x+e^{-x})^2}=\frac{1}{(\cosh x)^2}.$$

これは $(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ に似ている。

(14) $y = \dfrac{e^x}{1+e^x}$ のとき, 商の微分法により

$$y' = \frac{(e^x)'(1+e^x) - (e^x)(1+e^x)'}{(1+e^x)^2} = \frac{e^x(1+e^x) - (e^x)^2}{(1+e^x)^2} = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$$

(15) $y = \dfrac{x+2}{(x+1)(x-1)}$ とおき対数微分法を使う.

$\log y = \log(x+2) - \log(x+1) - \log(x-1)$

だから

$$\begin{aligned}(\log y)' &= (\log(x+2))' - (\log(x+1))' - (\log(x-1))' \\ &= \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1} = -\frac{x^2+4x+1}{(x+2)(x+1)(x-1)}.\end{aligned}$$

一方 $(\log y)' = \dfrac{y'}{y}$ だから

$$y' = (\log y)' y = -\frac{x^2+4x+1}{(x+1)^2(x-1)^2}.$$

(16) $y = \sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$ とおき対数微分法を使う.

$\log y = \dfrac{1}{2}(\log(x+1) - \log(x-1))$

だから

$$(\log y)' = -\frac{1}{(x+1)(x-1)}$$

一方 $(\log y)' = \dfrac{y'}{y}$ だから

$$y' = (\log y)' y = -\frac{1}{(x+1)^{\frac{1}{2}}(x-1)^{\frac{3}{2}}}.$$

(17) $y = x^\alpha$ $(x > 0)$ ($\alpha$ は実数の定数。対数微分法を使え)

両辺の対数をとると,

$$\log y = \log x^\alpha = \alpha \log x$$

が成り立つ．両辺を $x$ で微分する．

$$\frac{d}{dx}(\text{左辺}) = \frac{d}{dy}(\log y)\frac{y}{x} = \frac{y'}{y}$$
$$\frac{d}{dx}(\text{右辺}) = \alpha\frac{d}{dx}(\log x) = \frac{\alpha}{x}$$

である．したがって

$$y' = \frac{\alpha}{x} \times y = \frac{\alpha}{x} \times x^{\alpha} = \alpha x^{\alpha-1}$$

である．