電気のための微分積分 第3回　解答

問題 1. 定義にしたがって次の関数の導関数を求めよ.

(1) $y = 2$

$f(x) = 2$ とおく.

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2-2}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0.$$

(2) $y = x$

$f(x) = x$ とおく.

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h) - x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h}$$

$h \neq 0$ より, h で約分できるので

$$= \lim_{h\to 0} 1 = 1.$$

(3) $y = x^2$

$f(x) = x^2$ とおくと $f(x+h) = (x+h)^2$ だから

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2xh + h^2}{h}$$

$h \neq 0$ より, h で約分できるので

$$= \lim_{h\to 0} (2x + h) = 2x.$$

(4) $y = x^n$, $(n = 1, 2, \cdots)$

$f(x) = x^n$ とおくと,

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

二項定理により

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(x^n + nx^{n-1}h + {}_n\mathrm{C}_2 x^{n-2}h^2 + \cdots + h^n) - x^n}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{nx^{n-1}h + {}_n\mathrm{C}_2 x^{n-2}h^2 + \cdots + h^n}{h}$$

$h \neq 0$ より, h で約分することができるので

$$= \lim_{h\to 0} (nx^{n-1} + \boxed{h\text{ について 1 次以上の項}})$$

$$= nx^{n-1}.$$

(5) $y=\sqrt{x}$

$f(x)=\sqrt{x}$ とおくと $f(x+h)=\sqrt{x+h}$ だから

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(\sqrt{x+h}-\sqrt{x})(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)-x}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}$$

$h\neq 0$ より, h で約分することができるので

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

(6) $y=\dfrac{1}{x}$ のとき, $f(x)=\dfrac{1}{x}$ とおくと

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

ここで $f(x+h)=\dfrac{1}{x+h}$, $f(x)=\dfrac{1}{x}$ だから

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\frac{-h}{x(x+h)}=\frac{-1}{x^2}$$

問題 2　次の関数の導関数を計算せよ。

(1) $y=2x-3x^2$

$y'=(2x-3x^2)'=2(x)'-3(x^2)'=2-6x$

(2) $y=x^3-2x^2+5x+6$

$y'=(x^3-2x^2+5x+6)'=(x^3)'-2(x^2)'+5(x)'+(6)'=3x^2-4x+5$

(3) $y=3\sqrt{x}-\dfrac{2}{\sqrt{x}}$

$$y'=\left(3\sqrt{x}-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)'=3(\sqrt{x})'-2\left(\tfrac{1}{\sqrt{x}}\right)'=\frac{3}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{x^3}}$$

(4) $y = x^2 + x - 1 - \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2}$

$$y' = \left(x^2 + x - 1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)' = (x^2)' + (x)' - (1)' - \left(\frac{1}{x}\right)' - \left(\frac{1}{x^2}\right)'$$

$$= 2x + 1 + \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3}$$

(5) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^3}} = x^{-\frac{3}{2}}$

$$y' = -\frac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}}$$

(6) $y = \dfrac{\sqrt{x} - x}{\sqrt{x^3}} = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x^3}} - \dfrac{x}{\sqrt{x^3}} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sqrt{x}} = x^{-1} - x^{-\frac{1}{2}}$

$$y' = -x^{-2} + \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$$

(7) $y = \dfrac{x}{x-1}$

$$y' = \frac{(x)'(x-1) - x(x-1)'}{(x-1)^2} = \frac{-1}{(x-1)^2}$$

問題 4. (1) $y = 2x + 1$, $z = \sqrt{y}$ の合成関数は $z = \sqrt{2x+1}$ である。y に $2x + 1$ を代入すればよい。

(2) $y = 2x + 1$, $z = \dfrac{1}{y}$ の合成関数は $z = \dfrac{1}{2x+1}$ である。

(3) $y = \dfrac{1}{x}$, $z = 2y + 1$ の合成関数は $z = \dfrac{2}{x} + 1$ である。(2) と比較せよ。

(4) $y = \sqrt{x}$, $z = 2y + 1$ の合成関数は $z = 2\sqrt{x} + 1$ である。(1) と比較せよ.

問題 5. (1) 関数 $y = (2x+1)^4$ は, $2x + 1 = t$ とおくと x の関数 $t = 2x + 1$, t の関数 $y = t^4$ の合成関数である。

(2) 関数 $y = \sqrt{x^2 + 1}$ は, $x^2 + 1 = t$ とおくと x の関数 $t = x^2 + 1$, t の関数 $y = \sqrt{t}$ の合成関数である。

問題 6. 次の関数の導関数を計算せよ.

(1) $y = (2x-1)^{10}$ のとき $t = 2x - 1$ とおく.

関数 $y=(2x-1)^{10}$ は関数 $y=t^{10}$, $t=2x-1$ の合成関数である.

$$\frac{dy}{dt}=\frac{d}{dt}(t^{10})=10\,t^9 \qquad \frac{dt}{dx}=\frac{d}{dx}\,(2x-1)=2$$

だから合成関数の微分法により

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}=10\,t^9\times 2=20(2x-1)^9$$

である.

(2) $y=\dfrac{1}{2x-1}$ のとき, $t=2x-1$ とおく. $y=\dfrac{1}{2x-1}$ は $y=\dfrac{1}{t}$, $t=2x-1$ の合成関数となる.

$$\frac{dy}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{t}\right)=-\frac{1}{t^2} \qquad \frac{dt}{dx}=\frac{d}{dx}\,(2x-1)=2$$

だから合成関数の微分法により

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}=-\frac{1}{t^2}\times 2=-\frac{2}{(2x-1)^2}$$

である.

または 商の微分法により

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{2x-1}\right)'&=\frac{(1)'\times(2x-1)-1\times(2x-1)'}{(2x-1)^2}\\&=\frac{0\times(2x-1)-1\times 2}{(2x-1)^2}=\frac{-2}{(2x-1)^2}.\end{aligned}$$

(3) $y=\sqrt{2x-1}$ のとき, $t=2x-1$ とおく. 関数 $y=\sqrt{2x-1}$ は関数 $y=\sqrt{t}$, $t=2x-1$ の合成関数である.

$$\frac{dt}{dx}=\frac{d}{dx}\,(2x-1)=2$$

でありまた

$$\frac{dy}{dt}=\frac{d}{dt}\left(t^{\frac{1}{2}}\right)=\frac{1}{2}t^{\frac{1}{2}-1}=\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{t}}.$$

である. だから合成関数の微分法により

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{t}}\times 2=\frac{1}{\sqrt{2x-1}}$$

となる.

(4) $y=x^3+2x^2+1$ のとき,

$$y' = (x^3+2x^2+1)' = (x^3)' + 2(x^2)' + (1)' = 3x^2+4x.$$

(5) $y=(x^3+2x^2+1)^8$ のとき $t=x^3+2x^2+1$ とおく.

関数 $y=(x^3+2x^2+1)^8$ は関数 $y=t^8$, $t=x^3+2x^2+1$ の合成関数である.

$$\frac{dt}{dx} = \frac{d}{dx}\,(x^3+2x^2+1) = 3x^2+4x \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(t^8) = 8\,t^7$$

だから合成関数の微分法により

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = 8\,t^7 \times (3x^2+4x) = 8(3x^2+4x)(x^3+2x^2+1)^7$$

である.

(6) $y=\dfrac{1}{x}$ のとき

$$y' = \frac{-1}{x^2}$$

(7) $y=\dfrac{1}{x^3+2x^2+1}$ のとき, $t=x^3+2x^2+1$ とおく.

関数 $y=\dfrac{1}{x^3+2x^2+1}$ は関数 $y=\dfrac{1}{t}$, $t=x^3+2x^2+1$ の合成関数である.

$$\frac{dt}{dx} = \frac{d}{dx}\,(x^3+2x^2+1) = 3x^2+4x \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}\left(t^{-1}\right) = -t^{-2}$$

である. だから合成関数の微分法により

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = (-t^{-2}) \times (3x^2+4x) = \frac{-(3x^2+4x)}{(x^3+2x^2+1)^2}$$

である.

または 商の微分法により

$$\left(\frac{1}{x^3+2x^2+1}\right)' = \frac{(1)' \times (x^3+2x^2+1) - 1 \times (x^3+2x^2+1)'}{(x^3+2x^2+1)^2}$$
$$= \frac{0 \times (x^3+2x^2+1) - 1 \times (3x^2+4x)}{(x^3+2x^2+1)^2} = \frac{-(3x^2+4x)}{(x^3+2x^2+1)^2}.$$

(8) $y=\dfrac{1}{(x^3+2x^2+1)^8}$ のとき $t=x^3+2x^2+1$ とおく.

関数 $y=\dfrac{1}{(x^3+2x^2+1)^8}$ は関数 $y=\dfrac{1}{t^8}$, $t=x^3+2x^2+1$ の合成関数である.

$$\frac{dt}{dx} = \frac{d}{dx}\left(x^3+2x^2+1\right) = 3x^2+4x \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}\left(t^{-8}\right) = -8t^{-9}$$

である．だから合成関数の微分法により

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = (-8t^{-9})\times(3x^2+4x) = \frac{-8(3x^2+4x)}{(x^3+2x^2+1)^9}$$

である．

(9) $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ だからべき関数の微分法により

$$y' = \left(\sqrt{x}\right)' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

(10) $y = \sqrt{x^3+2x^2+1}$ のとき，$t = x^3+2x^2+1$ とおく． 関数 $y = \sqrt{x^3+2x^2+1}$ は関数 $y=\sqrt{t}$, $t = x^3+2x^2+1$ の合成関数である．

$$\frac{dt}{dx} = \frac{d}{dx}\left(x^3+2x^2+1\right) = 3x^2+4x$$

でありまた (9) により

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{t}}$$

である．だから合成関数の微分法により

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{t}}\times(3x^2+4x) = \frac{3x^2+4x}{2\sqrt{x^3+2x^2+1}}$$

となる．

(11) $\dfrac{1}{\sqrt{x}} = x^{-\frac{1}{2}}$ だからべき関数の微分法により

$$y' = \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)' = \left(x^{-\frac{1}{2}}\right)' = -\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}-1} = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{2\sqrt{x^3}}.$$

(12) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^3+2x^2+1}}$ のとき，$t = x^3+2x^2+1$ とおくと，関数 $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^3+2x^2+1}}$ は関数 $y = \dfrac{1}{\sqrt{t}}$， $t = x^3+2x^2+1$ の合成関数である．

$$\frac{dt}{dx} = \frac{d}{dx}\left(x^3+2x^2+1\right) = 3x^2+4x$$

であり，また (11) より

$$\frac{dy}{dt} = \frac{-1}{2\,t^{\frac{3}{2}}}$$

である．だから合成関数の微分法により

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{-1}{2\,t^{\frac{3}{2}}} \times (3x^2 + 4x) = \frac{-(3x^2 + 4x)}{2(x^3 + 2x^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}$$

となる．