電気のための微分積分　第1回　解答

記号の使い方に気を付けて筋の通った書き方をしてください。

問題 1. 次の数列の極限を求めよ.

(1) $\lim_{n\to\infty} n = +\infty$

(2) $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} = +\infty$　なぜなら,

$n \geqq 10^2 \Rightarrow \sqrt{n} \geqq 10,$

$n \geqq 100^2 \Rightarrow \sqrt{n} \geqq 100,$

$n \geqq 1000^2 \Rightarrow \sqrt{n} \geqq 1000,$

$\vdots$

(3) $\lim_{n\to\infty} 1 = 1$ $(1, 1, 1, \cdots$ という数列の極限)

(4) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{+\infty} = +0$

(5) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n-1} = \frac{1}{2(+\infty)-1} = \frac{1}{+\infty-1} = \frac{1}{+\infty} = +0$

(6) $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n-1}$ はこのままでは $\frac{\infty}{\infty}$ 型の不定形になるので分母分子を n で割ってそれを避ける。

$$\frac{n}{2n-1} = \frac{1}{2-\frac{1}{n}} \to \frac{1}{2-\frac{1}{+\infty}} = \frac{1}{2-0} = \frac{1}{2}$$

問題 2. $(1.01)^n \geqq 10^3$ の両辺の常用対数 (10 を底とする対数のこと) を取ると, $y = \log_{10} x$ は単調増加な関数だから

$\log_{10}(1.01)^n \geqq \log_{10} 10^3$

となるが

$\log_{10}(1.01)^n = n\log_{10} 1.01 = 0.0043214\,n,\ \ \log_{10} 10^3 = 3$

だから

$n \geqq \frac{3}{0.0043214} = 694.2\cdots.$

以上から $n \geqq 695$ ならばよい.

問題 3. (1) $\left|-\dfrac{2}{3}\right| < 1$ だから

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{2}{3}\right)^n = 0$ または $\left(-\dfrac{2}{3}\right)^n \to 0.$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{2}{3}\right)^n \to 0,\ \left(-\frac{2}{3}\right)^n = 0$ は不可.

(2) $\dfrac{3}{2} > 1$ だから

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^n = +\infty$, または $\left(\dfrac{3}{2}\right)^n \to +\infty.$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^n \to +\infty,\ \left(\frac{3}{2}\right)^n = +\infty$ は不可.

(3) $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型の不定形であるから, 不定形でなくなるように適当な変形を行ってから極限を求める. 分母分子を 2^n でわると,

$$\frac{2^{n+1}}{2^n+3^n} = \frac{2}{1+\frac{3^n}{2^n}} = \frac{2}{1+\left(\frac{3}{2}\right)^n}.$$

また $n\to\infty$ とすると $\left(\dfrac{3}{2}\right)^n \to +\infty$ だから,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}}{2^n+3^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{1+\left(\frac{3}{2}\right)^n} = \frac{2}{1+\infty} = 0,$$

または

$$\frac{2^{n+1}}{2^n+3^n} = \frac{2}{1+\left(\frac{3}{2}\right)^n} \to \frac{2}{1+\infty} = 0.$$

この 2 種類の表現法を混ぜないこと

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{4^{n+2}}{2^{2n}+3^n}$

$\dfrac{\infty}{\infty}$ 型の不定形であるから, 不定形でなくなるように分母分子を 4^n で割ってから (このことによって項の値は変わらない) 極限を求める. $2^{2n} = (2^2)^n = 4^n$, $\left(\dfrac{3}{4}\right)^n \to 0$ だから

$$\frac{4^{n+2}}{2^{2n}+3^n} = \frac{4^2}{1+\frac{3^n}{4^n}} = \frac{4^2}{1+\left(\frac{3}{4}\right)^n} \to \frac{16}{1+0} = 16.$$

問題 4.

(1) $\displaystyle \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{x-1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{1-\frac{1}{x}} = \frac{1}{1-\frac{1}{\pm\infty}} = \frac{1}{1-\pm 0} = \frac{1}{1\mp 0} = 1\pm 0,$

または

$$\frac{x}{x-1} = \frac{1}{1-\frac{1}{x}} \to \frac{1}{1-\frac{1}{\pm\infty}} = \frac{1}{1-\pm 0} = \frac{1}{1\mp 0} = 1\pm 0.$$

$\left(\dfrac{x}{x-1} = 1 + \dfrac{1}{x-1} \to 1 + \dfrac{1}{\pm\infty} = 1 + (\pm 0) = 1 \pm 0 \right.$ とした人がいました
が、わかりやすい解法です。$\Big)$

$x \to 1\pm 0 \;\Leftrightarrow\; x-1 \to \pm 0$ だから

$\displaystyle \lim_{x\to 1\pm 0} \frac{x}{x-1} = \frac{1}{\pm 0} = \pm\infty,$

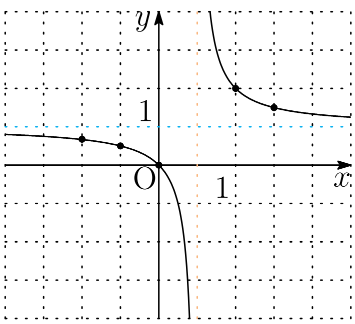
または

$\dfrac{x}{x-1} \to \dfrac{1}{\pm 0} = \pm\infty,$

まとめると

x	$-\infty$	-2	-1	0	1 ± 0	2	3	$+\infty$
$x-1$	$-\infty$	-3	-2	-1	± 0	1	2	$+\infty$
$f(x)$	$1-0$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	0	$\pm\infty$	2	$\frac{3}{2}$	$1+0$

(2) この表を使ってグラフの概形を書くと下のようになる.



問題 5.

(1) は前問を見よ。

(2) $\frac{0}{0}$ 型の不定形であるから, 不定形でなくなるように適当な変形を行ってから極限を求める. $x-3 \neq 0$ としてよいから約分ができて

$$\frac{x^2-x-6}{x-3} = \frac{(x+2)(x-3)}{x-3} = x+2$$

ここで $x \to 3$ とすると

$$\to 5.$$

だから,

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2-x-6}{x-3} = \lim_{x \to 3}(x+2) = 5.$$

また

$$\frac{x^2-x-6}{x-3} = x+2 \to 5 \quad (x \to 3).$$

でもよい.

(3) $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{x}{x^2+x}$

$\frac{\infty}{\infty}$ 型の不定形であるから, 不定形でなくなるように適当な変形を行ってから極限を求める. $x \neq 0$ としてよいから分母分子が約分できて

$$\frac{x}{x^2+x} = \frac{x}{x(x+1)} = \frac{1}{x+1}$$

ここで $x \to \infty$ とすると

$$\frac{1}{x+1} \to \frac{1}{\infty+1} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

だから

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x}{x^2+x} = 0.$$

(4) $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{x^2+x}$

$\frac{\infty}{\infty}$ 型の不定形であるから, 不定形でなくなるように適当な変形を行ってから極限を求める. $x \neq 0$ としてよいから分母分子が約分できて

$$\frac{x^2}{x^2+x} = \frac{x^2}{x(x+1)} = \frac{1}{1+\frac{1}{x}}$$

ここで $x \to \infty$ とすると

$$\frac{1}{1+\frac{1}{x}} \to \frac{1}{1+0} = 1.$$

だから

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2+x} = 1.$$

(5) $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{(2+h)^2-4}{h}$

$\frac{0}{0}$ 型の不定形であるから, 不定形でなくなるように変形を行ってから極限を求める.

$$\frac{(2+h)^2-4}{h} = \frac{4+4h+h^2-4}{h} = \frac{4h+h^2}{h}$$

$h \neq 0$ としてよいから約分ができて

$$= 4+h$$

ここで $t \to 0$ とすると

$$\to 4.$$

だから

$$\lim_{h\to 0} \frac{(2+h)^2-4}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{4h+h^2}{h} = \lim_{h\to 0}(4+h) = 4$$

または

$$\frac{(2+h)^2-4}{h} = \frac{4h+h^2}{h} = (4+h) \to 4$$

(6) $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{1}{(2+h)} - \frac{1}{2}\right) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{2-(2+h)}{2(2+h)}\right) = \lim_{h\to 0} \frac{-1}{2(2+h)} = -\frac{1}{4}$

または

$$\frac{1}{h}\left(\frac{1}{(2+h)} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{h}\left(\frac{2-(2+h)}{2(2+h)}\right) = \frac{-1}{2(2+h)} \to -\frac{1}{4}$$