電気のための微分積分 A 期末試験 解説

全体を通しての注意 1. カッコをさぼるな。

かけ算わり算はたし算引き算より先にやるという約束があるから,

$2x - 1e^x = 2x - e^x$

となる。$2x - 1$ を先に計算してほしかったら

$(2x-1)e^x = 2xe^x - e^x$ と書け。

2. $=$ を正しく使え。

$A = B$ とは A と B が等しいということを表す記号である。

$y = (x^2 - x + 1)^4 = t^4 = 4t^3 = 4(x^2 - x + 1)^3$

は不可。

$x^2 - x + 1 = t$ とおくと $y = (x^2 - x + 1)^4 = t^4$ だから

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}t^4 = 4t^3, \quad \frac{dt}{dx} = \frac{d}{dx}(x^2 - x + 1) = 2x - 1$$

ここで合成関数の微分法を使って

$y' = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = 4t^3(2x-1) = 4(x^2 - x + 1)^3(2x-1)$

と書け。

1. (1) 関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ の定義を述べよ.

第 2 回スライドの中を探せ。

(2) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ とするとき, $f(x+h)$ を x と h の式で表せ.

$f(x)$ を文字 x を含む式とするとき, $f(a)$ は $f(x)$ の x をすべて a でおきかえたものである。だから $f(x) = \dfrac{1}{x}$ であるとき, 両辺の x を $x+h$ で置きかえて

$$f(x+h) = \frac{1}{x+h}$$

となる。

$\dfrac{1}{x} + h$, $\dfrac{1}{x}(x+h)$, $\dfrac{1}{h}\left(\dfrac{1}{x+1}\right)$, $f\left(\dfrac{1}{x+h}\right)$, $f\left(\dfrac{1}{x}+h\right)$, $\cdots$ はすべて誤り。(何やってんだ)

(3) (1) の定義を用いて関数 $f(x) = \dfrac{1}{x}$ の導関数 $f'(x)$ を計算せよ.

演習問題 No.3 問題 1.(6) を見よ。

2. 次の関数の導関数を求めよ.

スライド第 3 回 12 ページ以降を見よ。

(1) $y = (x^2 - x + 1)^4$

のとき $t = x^2 - x + 1$ とおく.
関数 $y = (x^2 - x + 1)^4$ は関数 $y = t^4$, $t = x^2 - x + 1$ の合成関数である.

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(t^4) = 4\,t^3 \qquad \frac{dt}{dx} = \frac{d}{dx}\,(x^2 - x + 1) = 2x - 1$$

だから合成関数の微分法により

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = 4\,t^3 \times (2x - 1) = 4(2x - 1)(x^2 - x + 1)^3$$

である.

(2) $y = \dfrac{1}{x^2 - x + 1}$

$t = x^2 - x + 1$ とおく. $y = \dfrac{1}{x^2 - x + 1}$ は $y = \dfrac{1}{t}$, $t = x^2 - x + 1$ の合成関数となる.

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{t}\right) = -\frac{1}{t^2} \qquad \frac{dt}{dx} = \frac{d}{dx}\,(x^2 - x + 1) = 2x - 1$$

だから合成関数の微分法により

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = -\frac{1}{t^2} \times (2x - 1) = -\frac{2x - 1}{(x^2 - x + 1)^2}$$

である.

または 商の微分法により

$$\left(\frac{1}{x^2 - x + 1}\right)' = \frac{(1)' \times (x^2 - x + 1) - 1 \times (x^2 - x + 1)'}{(x^2 - x + 1)^2}$$

$$= \frac{0 \times (x^2 - x + 1) - 1 \times (2x - 1)}{(x^2 - x + 1)^2} = \frac{-(2x-1)}{(x^2 - x + 1)^2}.$$

(3) $y = \sqrt{2x-3}$

$t = 2x - 3$ とおく. 関数 $y = \sqrt{2x-3}$ は関数 $y = \sqrt{t}$, $t = 2x - 3$ の合成関数である.

$\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{d}{dx}(2x-3) = 2$

でありまた

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}\left(t^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2}t^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{t}}.$$

である. だから合成関数の微分法により

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{t}} \times 2 = \frac{1}{\sqrt{2x-3}}$$

となる.

(4) $y = e^{2x-3}$

スライド第 4 回 12 ページ以降を見よ。

$t = 2x - 3$ とおく.

関数 $y = e^{2x-3}$ は関数 $y = e^t$, $t = 2x - 3$ の合成関数である.

$\dfrac{dt}{dx} = 2, \qquad \dfrac{dy}{dt} = e^t$

だから合成関数の微分法により

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dt}\dfrac{dt}{dx} = e^t \times 2 = 2\,e^{2x-3}$

となる.

(5) $y = e^{2x}\cos(3x)$

スライド第 5 回 10 ページ以降を見よ。

まず (4) と同様にして $(e^{2x})' = 2e^{2x}$ がわかる。つぎに $\cos(3x)$ の導関数を求める。$t = 3x$ とおく.

関数 $y = \cos(3x)$ は関数 $y = \cos t$, $t = 3x$ の合成関数である.

$$\frac{dt}{dx} = 3, \qquad \frac{dy}{dt} = -\sin t$$

だから合成関数の微分法により

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = (-\sin t) \times 3 = -3\ \sin(3x)$$

となる.

積の微分法により

$y' = (e^{2x}\cos(3x))' = (e^{2x})'\cos(3x) + e^{2x}(\cos(3x))' = 2e^{2x}\cos(3x) + e^{2x}(-3\sin(3x)) = e^{2x}(2\cos(3x) - 3\sin(3x))$

(6) $y = e^{(2+3i)x}$, (i は虚数単位)

省略

(7) $y = \dfrac{\sin x}{1 + \cos x}$

省略

(8) $y = \dfrac{x-2}{2x+1}$

商の微分法をつかう。

$$y' = \left(\frac{x-2}{2x+1}\right)' = \frac{(x-2)'(2x+1) - (x-2)(2x+1)'}{(2x+1)^2} = \frac{(2x+1) - 2(x-2)}{(2x+1)^2} = \frac{5}{(2x+1)^2}$$

(9) $y = \sqrt{x^2 + a^2}$ ($a > 0$ は定数) 重要!

$t = x^2 + a^2$ とおく. 関数 $y = \sqrt{x^2 + a^2}$ は関数 $y = \sqrt{t}$, $t = x^2 + a^2$ の合成関数である.

$\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{d}{dx}(x^2 + a^2) = 2x$ (a は定数であるから $(a^2)' = 0$ であり, $2x + 2a$, $2x + a^2$ は誤り)

でありまた

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}\left(t^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2}t^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{t}}.$$

である．だから合成関数の微分法により

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{t}} \times (2x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

となる．

(10) $y = \dfrac{(x+1)^3(x-1)}{x^2}$ (対数微分法が使える)

省略

3. $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2$ について, 次の問いに答えよ．

(1) 導関数 $f'(x)$ を求めよ．

$$f'(x) = (x^3 + 3x^2 - 2)' = (x^3)' + 3(x^2)' - (2)' = 3x^2 + 6x$$

(2) 次の増減表を完成させよ．($\cdots$ は区間を表すので, 書き込まないこと．

スライド No.7 を見よ。

$f'(x) = 3x(x+2)$ であり

$x < -2$ のとき $3x < 0$, $(x+2) < 0$ だから $f'(x) > 0$, したがってこの区間で狭義単調増加

$x = -2$ のとき $f'(x) = 0$.

$-2 < x < 0$ のとき $3x < 0$, $(x+2) > 0$ だから $f'(x) < 0$. したがってこの区間で狭義単調減少

$x = 0$ のとき $f'(x) = 0$.

$0 < x$ のとき $3x > 0$, $(x+2) > 0$ だから $f'(x) > 0$. したがってこの区間で狭義単調増加

$f(-2) = 2$, $f(0) = -2$

以上をまとめて

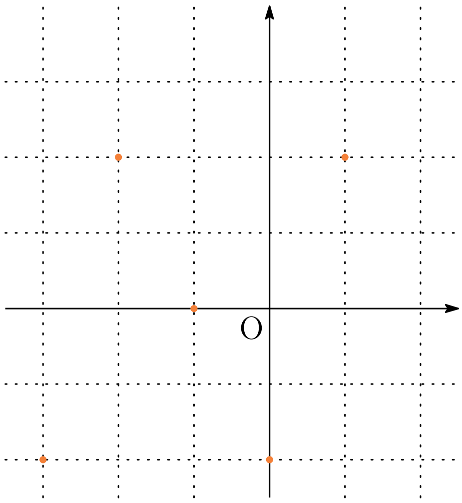
x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$

(3) $y = f(x)$ のグラフの概形をかけ．(目盛の間隔は 1 とする.)

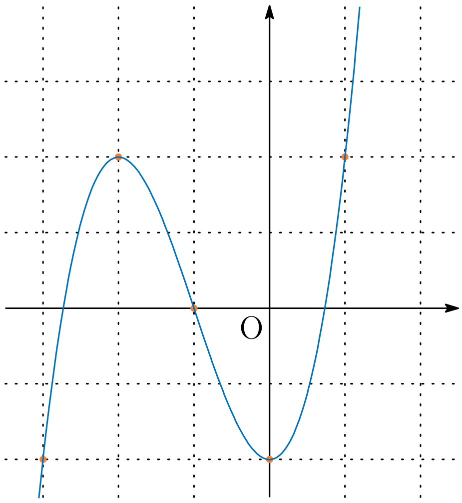
$x = -3, -2, cdots, 1$ を代入すれば

$f(-3) = -2,\ \ f(-2) = 2,\ \ f(-1) = 0,\ \ f(0) = -2,\ \ f(1) = 2$

が分かるので点 ● を通ることは分かるはずである。このくらいやってください。



増減の情報を加味すると



以下省略

4. $f(x) = (x-1)e^{2x}$ とする.

(1) $f(x) > 0$ となる x の値の範囲を求めよ.

(2) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x),\ \lim_{x\to+\infty} f(x)$ を求めよ. (Hint. $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\frac{t}{e^t} = 0$ を使ってもよい.)

(3) $f'(x)$ を求めよ.

(4) $f(x)$ の増減を調べ, 極値を求めよ.

5. 放物線 $y = -x^2 + 1$ 上に点 $\mathrm{A}(t, -t^2 + 1)$ をとる. ただし $0 < t < 1$ とする. また $\mathrm{B}(t, 0)$, $\mathrm{C}(-t, 0)$, $\mathrm{D}(-t, -t^2 + 1)$ とおく.

(1) 長方形 ABCD の面積 $S(t)$ を求めよ.

(2) $S(t)$ の $0 \leqq t \leqq 1$ における最大値を求めよ.