本日やること

1. ベクトル
   - スカラー量・ベクトル量
   - ベクトルの定義
   - ベクトルの大きさ
   - ベクトルの和
   - ベクトルのスカラー倍
   - ベクトルの成分表示
   - 2 点を結ぶベクトル
   - 内積
   - 直線のパラメータ表示

ベクトル

スカラー量・ベクトル量

[スカラー量] ： 実数で表される量

例：長さ, 時間, 質量, 温度, 電荷, 電位, $\cdots$

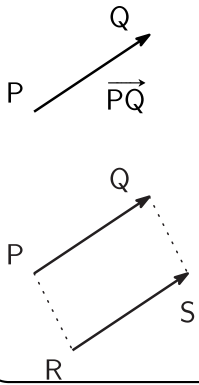
[ベクトル量] ： 大きさと向きを持つ量

例：速度, 加速度, 力, $\cdots$

ベクトル

ベクトル

ベクトルの定義



図のような向きのついた線分を $\overrightarrow{PQ}$ で表し ベクトル PQ とよぶ

P : 始点

Q : 終点

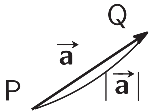
記号 $\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}, \cdots$ も用いる

ただし平行移動して重なるベクトルは同じものと考える。

ベクトル

ベクトルの大きさ・和

ベクトルの大きさ

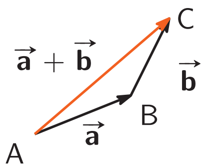


$\vec{\mathbf{a}} = \overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ のとき

$\vec{\mathbf{a}}$ の大きさ を PQ と定め, $|\vec{\mathbf{a}}|$ で表す。

ベクトル
ベクトルの和

ベクトルの和の定義



$\vec{\mathbf{a}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\vec{\mathbf{b}} = \overrightarrow{\mathrm{BC}}$

のとき

$\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}} = \overrightarrow{\mathrm{AC}}$

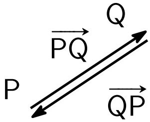
と定める。

複素数の和と同じ考え方である。

ベクトル
ベクトルの和

[0 ベクトル]　$\vec{\mathbf{0}}$　:　始点と終点が一致したベクトル

[逆ベクトル]



$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ の逆ベクトルを $\overrightarrow{\mathrm{QP}}$ と定め
$-\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ で表す

[ベクトルの差] :　$\vec{\mathbf{a}} + (-\vec{\mathbf{b}})$ を $\vec{\mathbf{a}} - \vec{\mathbf{b}}$ と書くことにする

ベクトル

ベクトルの和の性質

ベクトルの和の性質

[0] : $\vec{\mathbf{a}} + (-\vec{\mathbf{a}}) = \vec{\mathbf{0}}$, $\quad \vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{0}} = \vec{\mathbf{0}} + \vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{a}}$,

[I] : $\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}} = \vec{\mathbf{b}} + \vec{\mathbf{a}}$ (交換法則)

[II] : $(\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}}) + \vec{\mathbf{c}} = \vec{\mathbf{a}} + (\vec{\mathbf{b}} + \vec{\mathbf{c}})$ (結合法則)

ベクトル

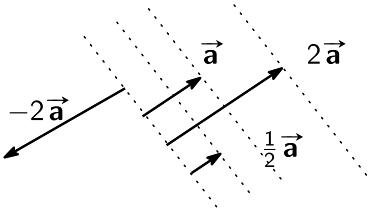
ベクトルのスカラー倍

ベクトルのスカラー倍の定義

m ： 実数 (スカラー)，　$\vec{\mathbf{a}}$ ： ベクトル のとき

$$m\vec{\mathbf{a}} = \begin{cases} 大きさ\ |m||\vec{\mathbf{a}}|\ で\ \vec{\mathbf{a}}\ と同じ向きのベクトル & (m > 0\ のとき) \\ \vec{\mathbf{0}} & (m = 0\ のとき) \\ 大きさ\ |m||\vec{\mathbf{a}}|\ で\ \vec{\mathbf{a}}\ と反対向きのベクトル & (m < 0\ のとき) \end{cases}$$

と定める。



ベクトル

ベクトルのスカラー倍

ベクトルのスカラー倍の性質

m, n : 実数 (スカラー),　$\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}$: ベクトル のとき

[III] : $m(n\vec{\mathbf{a}}) = (mn)\vec{\mathbf{a}}$,

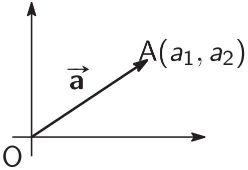
[IV] : $(m+n)\vec{\mathbf{a}} = m\vec{\mathbf{a}} + n\vec{\mathbf{a}}$

[V] : $m(\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}}) = m\vec{\mathbf{a}} + m\vec{\mathbf{b}}$

[VI] : $|m\vec{\mathbf{a}}| = |m||\vec{\mathbf{a}}|$

ベクトル
成分表示

ベクトルの成分表示の定義



$\vec{\mathbf{a}} = \overrightarrow{OA}$, A$(a_1, a_2)$ のとき

$\vec{\mathbf{a}} = (a_1, a_2)$

と表す.

ベクトル

成分表示

ベクトルの成分による計算

$\vec{\mathbf{a}} = (a_1, a_2),\quad \vec{\mathbf{b}} = (b_1, b_2)$ のとき

[I] : $\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{b}} \Leftrightarrow a_1 = b_1, a_2 = b_2$

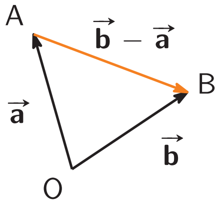
[II] : $|\vec{\mathbf{a}}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$

[III] : $\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$

[VI] : $m\vec{\mathbf{a}} = (ma_1, ma_2)$ (m はスカラー)

ベクトル

2 点を結ぶベクトル



$\vec{\mathbf{a}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\vec{\mathbf{b}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ のとき

$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{\mathbf{b}} - \vec{\mathbf{a}}$

A の座標 (a_1, a_2), B の座標 (b_1, b_2) のとき

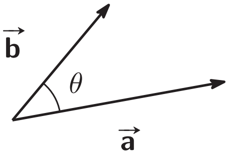
$\vec{\mathbf{a}} = (a_1, a_2)$, $\vec{\mathbf{b}} = (b_1, b_2)$ だから

$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$

ベクトル

内積

内積の定義



$\vec{a}$, $\vec{b}$ のなす角を θ $(0 \leqq \theta \leqq \pi)$ とするとき内積 $\vec{a} \bullet \vec{b}$ を

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = \begin{cases} |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta, & (\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0} \text{のとき}) \\ 0, & (\text{それ以外のとき}) \end{cases}$$

で定める。

内積はベクトルではなくスカラーであることに注意せよ

ベクトル

内積

内積の性質

[I] : $\vec{\mathbf{a}} \bullet \vec{\mathbf{a}} = |\vec{\mathbf{a}}|^2$

[II] : $\vec{\mathbf{a}} \bullet \vec{\mathbf{b}} = \vec{\mathbf{b}} \bullet \vec{\mathbf{a}}$

[III] : $(m\vec{\mathbf{a}}) \bullet \vec{\mathbf{b}} = \vec{\mathbf{a}} \bullet (m\vec{\mathbf{b}}) = m(\vec{\mathbf{a}} \bullet \vec{\mathbf{b}})$ （m はスカラー）

[VI] : $\vec{\mathbf{a}} \bullet (\vec{\mathbf{b}} + \vec{\mathbf{c}}) = \vec{\mathbf{a}} \bullet \vec{\mathbf{b}} + \vec{\mathbf{a}} \bullet \vec{\mathbf{c}}$

ベクトル

内積の成分表示

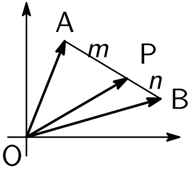
内積の成分表示

$$\vec{\mathbf{a}} = (a_1, a_2),\ \vec{\mathbf{b}} = (b_1, b_2) \ \Rightarrow\ \vec{\mathbf{a}} \bullet \vec{\mathbf{b}} = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

ベクトル

内分点のベクトル表示

[内分点のベクトル表示]



P : AB を $m:n$ $(m>0,\ n>0)$ に内分する点

$$\Rightarrow \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{n\overrightarrow{\mathrm{OA}} + m\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{m+n}$$

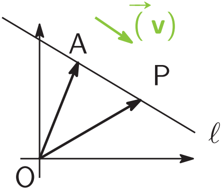
とくに P が AB の中点

$$\Rightarrow \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}}}{2}$$

ベクトル

直線のパラメータ表示

[直線のパラメータ表示]



ℓ は点 A を通りベクトル $\vec{\mathbf{v}}$ に平行な直線

P : ℓ 上の任意の点

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\vec{\mathbf{v}}$$

$\vec{\mathbf{v}}$: ℓ の方向ベクトル

t : パラメータ