# 本日やること

1. 複素数
   - 定義
   - 複素数の相等・演算
   - $n$ 次方程式の解
   - 複素平面
   - 極形式
   - 回し伸ばしの原理
   - 三角関数への応用
2. 三角関数の公式

# 複素数

## 定義

**複素数の定義**

$$i^2 = -1$$

をみたす $i$ を虚数単位とよぶ.

$$x + iy, \quad x, y \in \mathbb{R}$$

の形の数を複素数とよぶ.

複素数 $z = x + iy$ に対して

$x$ : 複素数 $z$ の実部 (real part) $\mathbf{Re}z$,

$y$ : 複素数 $z$ の虚部 (imaginary part) $\mathbf{Im}z$

と定める.

# 複素数

## 相等・演算

**複素数の相等**

$x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ のとき

$$x_1 + iy_1 = x_2 + iy_2 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = x_2,\ \ y_1 = y_2$$

とくに

$$x_1 + iy_1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = y_1 = 0$$

# 複素数
## 相等・演算

**複素数の演算**

複素数の四則演算は文字 $i$ を含む式と同様の規則で行い，$i^2$ が現われたらこれを $-1$ で置き換えることにする.

[例] $z_1 = 2+3i,\ z_2 = -1+i$ とするとき

$$z_1 + z_2 = (2+3i) + (-1+i) = 2-1+3i+i = 1+4i$$

$$z_1 - z_2 = (2+3i) - (-1+i) = 2+1+3i-i = 3+2i$$

$$z_1 z_2 = (2+3i)(-1+i) = -2+2i-3i+3i^2 = -5-i$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2+3i}{-1+i} = \frac{(2+3i)(-1-i)}{(-1+i)(-1-i)} = \frac{-2-2i-3i-3i^2}{(-1)^2-i^2} = \frac{1-5i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{5}{2}i$$

# 複素数

## 相等・演算

複素数 $z_1$, $z_2$ に対して

$$z_1 z_2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z_1 = 0 \text{ または } z_1 = 0$$

# 複素数

## 2 次方程式再録

[複素数の存在意義]

**二次方程式の解の公式再録**

二次方程式

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad (a,\ b,\ c \text{ は実数の定数} \quad a \neq 0)$$

の解は判別式 $D = b^2 - 4ac$ を用いて

(i) $D > 0$ のとき $\quad x = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$ 異なる 2 実数解

(ii) $D = 0$ のとき $\quad x = -\dfrac{b}{2a}$ 重解

(iii) $D < 0$ のとき $\quad x = \dfrac{-b \pm \sqrt{-D}i}{2a}$ 異なる 2 複素数解

# 複素数
## 代数学基本定理

これをさらに進めて

**代数学基本定理**

$a_0, a_1, \cdots, a_n$ を複素数の定数とするとき，$n$ 次方程式

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

は (重複も含めて)$n$ 個の複素数の解を持つ．また，その解を $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ として

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = a_n (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdots (x - \alpha_n)$$

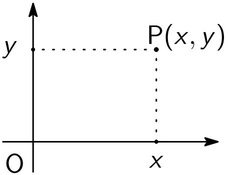
のように因数分解できる．

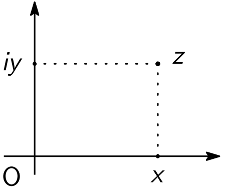
じつはもう一つ存在意義がある。

# 複素数

## 複素平面

### 座標平面と複素平面




[座標平面]
平面の各点 P に 2 つの実数の組 $(x, y)$ を対応させたもの.
$(x, y)$ を P の直角座標という.

[複素平面]
直角座標 $(x, y)$ の点 P に複素数

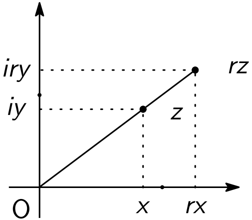
$$z = x + iy$$

を対応させたもの.
横の座標軸を実軸, 縦の座標軸を虚軸と呼ぶ.

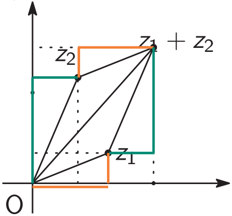
# 複素数

## 複素平面上の実数倍と和

[複素平面上の実数倍と和]




正の実数倍： $r > 0$ のとき $rz$ は $z$ を偏角を変えないで絶対値を $r$ 倍したもの。$r < 0$ のときは向きを反対にして絶対値を $r$ 倍したもの。




和： $z_1 + z_2$ は図のような平行四辺形の対角線が表す複素数。

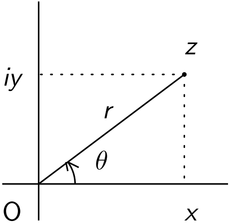
$$z_1 = x_1 + iy_1,\ z_2 = x_2 + iy_2$$
$$\Rightarrow\ z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

平面のベクトルと同じ考え方。

# 複素数

## 極形式

### 複素数の極形式




複素数 $z = x + iy$ に対して

$$r = \text{点 } z \text{ と原点 O の距離},$$
$$\theta = \text{線分 O}z \text{ と 実軸の正の部分とのなす角}$$

とおくと,

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

と表される．これを複素数 $z$ の**極形式**という.

$r = |z|$ : **絶対値**,
$\theta = \arg z$ : **偏角**
という

# 複素数

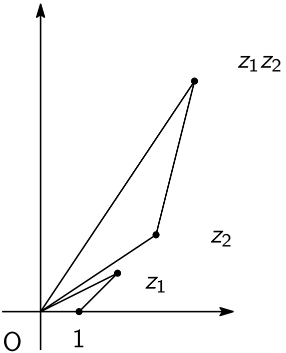
## 極形式と実部虚部の関係

### 極形式と実部虚部の関係

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \tan\theta = \frac{y}{x}.$$

# 複素数

## 積と極形式の関係




$z_1 = 2 + i, \quad z_2 = 3 + 2i$ とするとき

$z_1z_2 = (2 + i)(3 + 2i) = 4 + 7i$

だから

O, 1, $z_1$ の作る三角形と

O, $z_2$, $z_1z_2$ の作る三角形

は相似である。

[問] このことを確かめよ。

実はこのことは任意の複素数 $z_1$, $z_2$ について成り立つ！

# 複素数

## 回し伸ばしの原理

**回し伸ばしの原理**

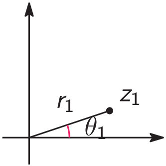
2 つの複素数 $z_1, z_2$ の積 $z_1 z_2$, 商 $\dfrac{z_1}{z_2}$ は

$$(i)\ \arg\, z_1 z_2 = \arg\, z_1 + \arg\, z_2, \qquad |z_1 z_2| = |z_1||z_2|$$

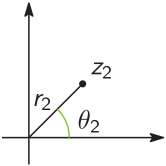
$$(ii)\ \arg\, \frac{z_1}{z_2} = \arg\, z_1 - \arg\, z_2, \qquad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

によって決まる.

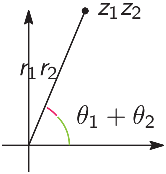
(i) は




$\times$



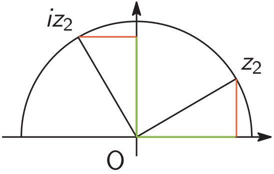

$=$




ということ

# 複素数
## 回し伸ばしの原理

[(i) の確かめ] $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ とする.

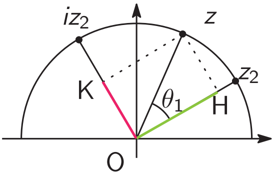



(Step 1) $z_1 = i$ の場合.

$$z_2 = x_2 + iy_2 \quad \Rightarrow \quad iz_2 = -y_2 + ix_2$$

だから $iz_2$ は $z_2$ を左周りに角 $\frac{\pi}{2}$ だけ回転したもの.

# 複素数
## 回し伸ばしの原理




(Step 2) $z_1 = \cos\theta_1 + i\sin\theta_1$ の場合.

$z$ : $z_2$ を角 $\theta_1$ 回転したもの.

とし,

H : $(\cos\theta_1)z_2$

K : $(\sin\theta_1)(iz_2)$

とすると $\sin\theta_1$, $\cos\theta_1$ の定義より OH $\perp$ H$z$, OK $\perp$ K$z$ だから

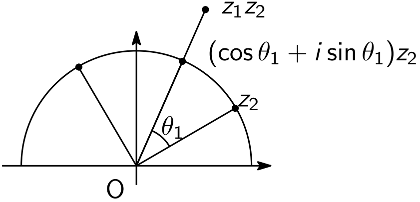
$$z = (\cos\theta_1)z_2 + (\sin\theta_1)(iz_2) = (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)z_2 = z_1z_2$$

まとめて

$(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)z_2$ は $z_2$ を 角 $\theta_1$ だけ回転したもの.

# 複素数

## 回し伸ばしの原理




(Step 3) $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ の場合.

$z_1 z_2$ は $(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)z_2$ と

偏角が同じで

絶対値を $r_1$ 倍したもの

だから結局 (i) がわかった.

# 複素数
## 三角関数への応用

[三角関数の加法定理] 回し伸ばしの原理から

$$(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) = \cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\cdots(\star)$$

がわかるが,

$(\star)$ の左辺 $=$

だから実部同士を比較して

$\cos(\theta_1+\theta_2) =$

虚部同士を比較して

$\sin(\theta_1+\theta_2) =$

# 三角関数の公式

[2 倍角の公式]

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$$

# 三角関数の公式

**[三角関数の合成]** 実数 $a, b$ のうち少なくとも１つは 0 でないとするとき，
$\cos\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\sin\alpha = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ を満たす角 $\alpha$ をとると，

$$a\sin\theta + b\cos\theta = \sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$$