本日やること

1. 指数関数
   - 定義
   - グラフ
   - 性質

2. 対数関数
   - 対数の定義
   - 対数の性質

指数関数

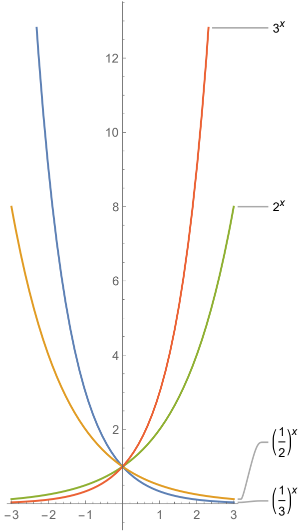
定義

指数関数の定義

$a > 0$, $a \neq 1$ とする．実数べきから作られる関数 $f(x) = a^x$ を，a を底とする x の指数関数とよぶ．

指数関数

グラフ



$2, 2^2, 2^3, \cdots$ は激しく増加する。

実数べき 2^x は等比数列 2^n, $(n = 1, 2, \cdots)$ を拡張したものだから, x が増加すると同様に激しく増加する。

$\frac{1}{2}, \left(\frac{1}{2}\right)^2, \left(\frac{1}{2}\right)^3, \cdots$ は非常にはやく 0 に近づく。

実数べき $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ は等比数列 $\left(\frac{1}{2}\right)^n$, $(n = 1, 2, \cdots)$ を拡張したものだから, x が増加すると同様に非常にはやく 0 に近づく。

指数関数

性質

定理 2.1.　指数関数の性質

(I) 指数関数 $f(x) = a^x$ の定義域は実数全体 $\mathbb{R}$, 値域は正の実数全体 $(0, \infty)$ である．また,

(i) $1 < a$ のとき狭義単調増加,

(ii) $0 < a < 1$ のとき狭義単調減少.

(II) すべての実数 $t, s \in \mathbb{R}$ に対して次の指数法則が成り立つ.

$$a^{t+s} = a^t a^s, \quad a^{t-s} = \frac{a^t}{a^s}, \quad a^{ts} = (a^t)^s$$

ただし, 関数 $f(x)$ が
狭義単調増加であるとは $t < s \ \Rightarrow \ f(t) < f(s)$ であること。
狭義単調減少であるとは $t < s \ \Rightarrow \ f(t) > f(s)$ であること。

対数関数

対数の定義

対数の定義

a を $a > 0$, $a \neq 1$ を満たす定数とする．このとき，正の数 M に対して

$$a^{p} = M$$

となる実数 p がただ 1 つ存在するこの p を

$$p = \log_a M, \quad M > 0$$

と表し，a を底とする M の対数という．また，M を真数と呼ぶ．つまり

$$p = \log_a M \quad \Longleftrightarrow \quad a^{p} = M \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{①}$$

である．$\log_a M$ はログ底 a の M と読む．

対数関数

対数の定義

特に

$$a^{\log_a M} = M$$

$$\log_a a^p = p$$

$$\log_a a = 1 \iff a^1 = a$$

$$\log_a 1 = 0 \iff a^0 = 1$$

注意すること
底の条件：$a > 0,\ a \neq 1$
真数条件：$M > 0$

対数関数

例

[例]

$\log_2 \sqrt{32}$ を求める.

$\log_2 \sqrt{32} = p$ とおくと

$\Leftrightarrow \ 2^p = \sqrt{32}$

ところで $\sqrt{32} = (2^5)^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{5}{2}}$ だから指数を比較して

$p = \dfrac{5}{2}$

対数関数

対数の性質

対数の性質

a, b : 1 でない正の数, $M > 0$, $N > 0$, k, x, p を実数とするとき

$$(i)\ \log_a(MN) = \log_a M + \log_a N$$

$$(ii)\ \log_a\left(\frac{M}{N}\right) = \log_a M - \log_a N$$

$$(iii)\ \log_a\left(M^k\right) = k\log_a M$$

$$(iv)\ \log_a M = \frac{\log_b M}{\log_b a} \quad \text{(底の変換公式)}$$

対数関数
対数の性質

[(i) の確かめ]

$$
\begin{array}{ccc}
\log_a M = t \text{ とおく} & \overset{\text{定義より}}{\iff} & a^t = M \\
\log_a N = s \text{ とおく} & \overset{\text{定義より}}{\iff} & a^s = N \\
 & \text{かけ合わせて} & a^t a^s = MN \\
 & \text{指数法則より} & \| \\
\log_a MN = t + s & \overset{\text{定義より}}{\iff} & a^{t+s} \\
\| & & \\
\log_a M + \log_a N & &
\end{array}
$$

対数関数

対数の性質

(iv) のたしかめ.

(iv) $\Leftrightarrow$ $\underbrace{\log_a b}_{t\text{とおく}}\ \underbrace{\log_b c}_{s\text{とおく}} = \log_a c$ ~~$\Leftrightarrow \log_b a \log_a M = \log_b M \Leftrightarrow$ (iv).~~

定義より $\Updownarrow$ $\Updownarrow$

$a^t = b,\quad b^s = c$

だから $\boxed{a^{ts} = (a^t)^s} = b^s = c.$

指数法則

定義より $\Updownarrow$

$\log_a c = ts = \log_a b \log_b c.$

対数関数

例

[例]

$X = \log_a x,\ Y = \log_a y,\ Z = \log_a z$ とおくと

$$\log_a(xyz) = \log_a x + \log_a y + \log_a z = X + Y + Z$$

$$\log_a \frac{\sqrt{x}y}{\sqrt{z^3}} = \log_a(x^{\frac{1}{2}}yz^{-\frac{3}{2}}) = \frac{1}{2}\log_a x + \log_a y - \frac{3}{2}\log_a z$$

$$= \frac{1}{2}X + Y - \frac{3}{2}Z \quad \text{(訂正あり)}$$