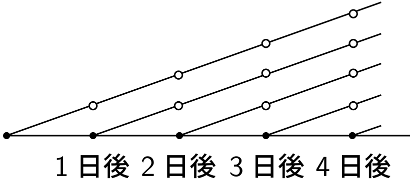
本日やること

1. 指数関数
   - 微生物の増殖
   - 定数倍変化の法則
   - 有理数べき
   - 指数法則
   - 実数べき

指数関数

微生物の増殖

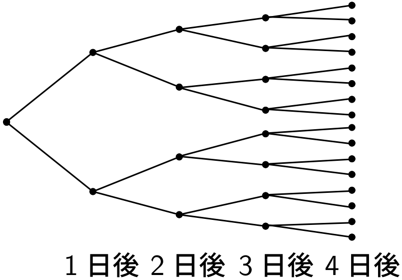
分裂して増殖することにより個体数が 1 日で 2 倍になる微生物がある。



「子供」は分裂しない

$\Rightarrow$ n 日後 n 倍となる。

等差数列的変化



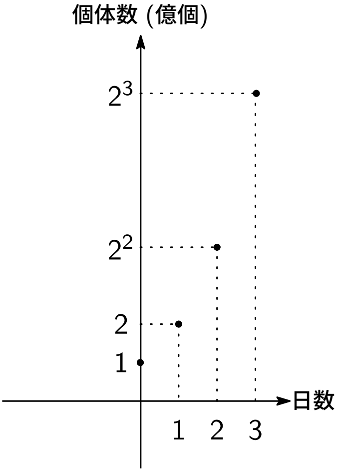
「子供」も「親」になって分裂する

$\Rightarrow$ n 日後 2^n 倍となる。

等比数列的変化

指数関数

微生物の増殖



初めの個体数を 1 (億個) とすると n 日後の個体数は

$$2^n \text{ (億個)}, \quad n = 1, 2, 3 \cdots$$

である。

[本日の目標] 増殖は連続的変化であるはずである。t 日後 (t は実数) の個体数を決めたい。

指数関数

定倍率変化の法則

「1 日で 2 倍に増殖する」

を一歩進めて

「(どの時点から始めても) 一定の時間がたつと全個体中の一定割合の個体が分裂する」

「その結果 1 日後に a 倍になる。(a は正の定数)」

と考える。

t 日後の個体数を a^t と書くことにする。ただし t は実数である．これを実数冪 (べき) とよぶ。

指数関数

定倍率変化の法則

だから次のことが成り立つとしてよいだろう。

定倍率変化の法則

t が一定量増加すると a^t は t によらず一定の倍率で変化する。:

$$\frac{a^{t+h}}{a^t} = u(h) \quad (u(h) \text{ は } t \text{ によらない}) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \spadesuit$$

これを**定倍率変化の法則**という。

指数関数

有理数べき

定倍率変化の法則が成り立つものとして, 有理数べき

$$a^{\frac{n}{m}} \quad m, n \text{ は整数}, m \neq 0$$

を決めたい。

t	-2	-1	0	1	2	3
a^t				a	a^2	a^3

だから

$$a^0 = 1 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad Ⓐ$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \quad n = 1, 2, \cdots \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad Ⓑ$$

と決める。

指数関数

復習：累乗根

復習：累乗根

$a \geqq 0,\ n = 2, 3, \cdots$ に対し

$$x^n = a \text{ かつ } x \geqq 0$$

を満たす実数 x がただ 1 つ存在する．この x を a の（非負の）n 乗根といい $\sqrt[n]{a}$ で表す．

$n = 2$ のときは平方根： $x = \sqrt{a} \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = a$ かつ $x \geqq 0$

$\sqrt{2} = 1.4142\cdots \qquad (1.4142)^2 \fallingdotseq 2.000$

$\sqrt[3]{2} = 1.25992\cdots \qquad (1.25992)^3 \fallingdotseq 2.000$

$\sqrt[4]{2} = 1.18921\cdots \qquad (1.18921)^4 \fallingdotseq 2.000$

指数関数

有理数べき

t	0	$\frac{n}{m}$	$\frac{2n}{m}$	n
a^t	1	x とおく		a^n

だから

$$x^m = a^n \qquad (x > 0 \text{ としてよいから} \Leftrightarrow \ x = \sqrt[m]{a^n})$$

だから

$$a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}, \quad m, n = 1, 2, \cdots \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \ \text{Ⓒ}$$

と決める。

指数関数

有理数べき

t	$-\frac{n}{m}$	0	$\frac{n}{m}$
a^t	x とおく	1	$\sqrt[m]{a^n}$

だから

$$x = \frac{1}{\sqrt[m]{a^n}}$$

だから

$$a^{-\frac{n}{m}} = \frac{1}{\sqrt[m]{a^n}}, \quad m, n = 1, 2, \cdots \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad Ⓓ$$

と決める。

指数関数
指数法則

定倍率変化の法則 (♠) は

指数法則

$$a^{t+s} = a^t a^s, \quad t, s \text{ は有理数} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad \diamondsuit$$

と同値である。なぜなら

$$\begin{aligned} \spadesuit \ &\Leftrightarrow \frac{a^{t+s}}{a^s} = u(t) \quad (s \text{ によらない}) \\ &\Leftrightarrow a^{t+s} = a^s u(t) \end{aligned}$$

ここで $s = 0$ を代入すると $a^0 = 1$, $a^t = u(t)$ だから

$$\Leftrightarrow a^{t+s} = a^s a^t$$

指数関数

指数法則

まとめると

指数法則と有理数べき

指数法則　$a^{t+s} = a^t a^s, \quad t, s$ は有理数 $\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad \textcircled{\diamond}$

をみとめると有理数べきは

$$a^0 = 1 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad \textcircled{A}$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \quad n = 1, 2, \cdots \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad \textcircled{B}$$

$$a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}, \quad m, n = 1, 2, \cdots \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad \textcircled{C}$$

$$a^{-\frac{n}{m}} = \frac{1}{\sqrt[m]{a^n}}, \quad m, n = 1, 2, \cdots \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad \textcircled{D}$$

のように定められる。

指数関数

指数法則

指数法則と有理数べき

逆に A, B, C, D のように定めると指数法則が成り立つことが確かめられる。教科書 P.20 例 2.2 をみよ。

指数関数

指数法則

指数法則に追加

$a > 0,\ b > 0,\ t, s$ は有理数のとき

$$(i)\ a^r a^s = a^{r+s},$$

$$(ii)\ \frac{a^r}{a^s} = a^{r-s},$$

$$(iii)\ (a^r)^s = a^{rs},$$

$$(iv)\ (ab)^r = a^r b^r$$

$$(v)\ \left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$$

指数関数
累乗根を含む式の計算

累乗根は有理数べきに直して指数法則を使って計算するのがよい。

[例]

$$
\begin{aligned}
\sqrt{a^3 \times \sqrt{a} \times \sqrt[4]{a}} &= \left(a^3 \times a^{\frac{1}{2}} \times a^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(a^{3+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= a^{(3+\frac{1}{2}+\frac{1}{4})\times\frac{1}{2}} \\
&= a^{\frac{15}{8}}
\end{aligned}
$$

指数関数

実数べき

実数べきの定義

実数 t に対してこれに近づいていく有理数の列 $r_1, r_2, r_3, \cdots$ がある．このとき，$a^{r_1}, a^{r_2}, a^{r_3}, \cdots$ が定義されるが，これらもある値に近づいていくことが知られている。この値を

$$a^t$$

と定める。これを実数べきという。

実数冪も指数法則を満たす