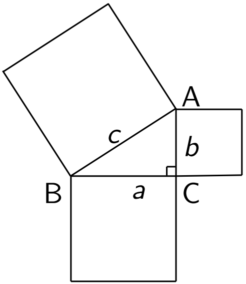
本日やること

1. 三角比
   - 三平方の定理
   - 三角比
2. 三角関数
   - 弧度法
   - 回転の角
   - 定義
   - グラフの作図

直角三角形・三平方の定理

三平方の定理



直角三角形 ABC において

$$a^2 + b^2 = c^2$$

すべての古代文明で知られていた，極めて重要な定理です。

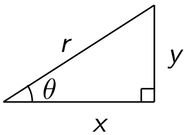
証明はウェブ上にたくさんあります。たとえば

https://www.youtube.com/watch?v=wn3GwS4YCb0

三角比

定義 (鋭角の場合)

三角比の定義 (鋭角の場合)



角 θ が鋭角の場合, 図のような直角三角形を用いて

$$\theta \text{ の正弦を } \sin\theta = \frac{y}{r}$$

$$\theta \text{ の余弦を } \cos\theta = \frac{x}{r}$$

$$\theta \text{ の正接を } \tan\theta = \frac{y}{x}$$

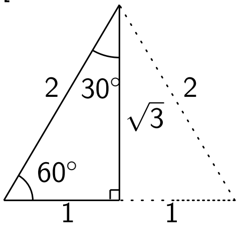
と定める。

三角形を相似に拡大 (縮小) してもこの値は変わらず, θ のみによって決まる。

三角比

特別な角の三角比

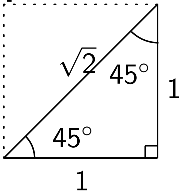
[正三角形を半分にしたもの]　三平方の定理により $(\text{対辺})^2 = 2^2 - 1^2 = 3$



$$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \cos 60^\circ = \frac{1}{2} \quad \tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2} \quad \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

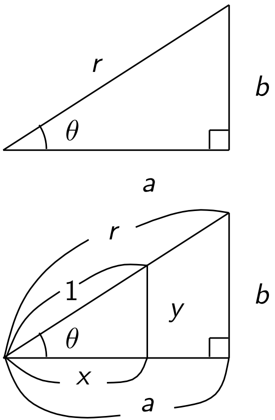
[正方形を半分にしたもの]　三平方の定理により $(\text{斜辺})^2 = 1^2 + 1^2 = 2$



$$\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \tan 45^\circ = 1$$

三角比

定義 (一般の角の場合)



直角三角形を r が 1 になるように相似変形しても

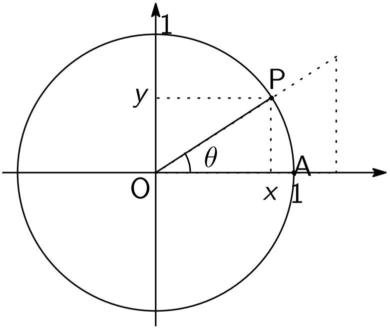
$$\frac{a}{r} = x, \qquad \frac{b}{r} = y$$

だからこれを利用して三角比の定義を拡張する。

三角比

定義 (一般の角の場合)

三角比の定義 (一般の角の場合)



原点中心の単位円周上で

A$(1, 0)$　P(x, y)　$\angle$AOP $= \theta$

とするとき

$\sin\theta = y$

$\cos\theta = x$

$\tan\theta = \dfrac{y}{x}$

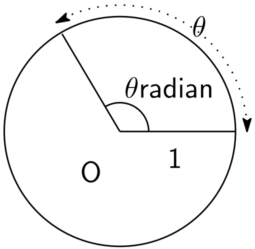
と定める。

三角形を相似に拡大 (縮小) してもこの値は変わらず, θ のみによって決まる。

三角関数

弧度法

弧度法の定義



θ radian (ラジアン)

　= 半径 1 の円周の, 長さ θ の円弧に対する中心角の大きさ

普通、θ (rad) と書くが (rad) を省略することもある。

度数法と比較すると,

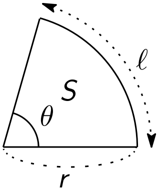
1 回転 $= 360^\circ$, 半径 1 の円の円周の長さ $= 2\pi$

だから

$$2\pi \text{ (rad)} = 360^\circ, \quad \pi \text{ (rad)} = 180^\circ, \quad \frac{\pi}{2} \text{ (rad)} = 90^\circ, \cdots$$

三角関数

弧度法の性質



半径 r 中心角 θ(rad) の扇形 において

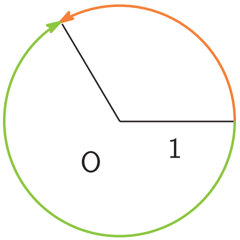
弧の長さ：$\ell = r\theta$

面積：$S = \pi r^2 \times \dfrac{\theta}{2\pi} = \dfrac{1}{2}r^2\theta = \dfrac{1}{2}r\ell$

三角関数

回転の角

回転の角の定義



P が原点中心半径 1 の円周上を回転しているとき

P の回転の角が θ (rad) であるとは

正の向きの回転のとき $\theta =$(P の軌跡の長さ)
負の向きの回転のとき $\theta = -$(P の軌跡の長さ)

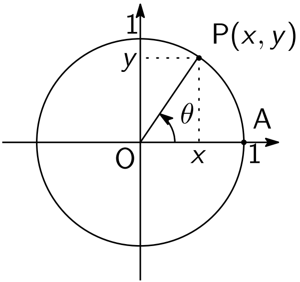
であること．ただし

正の向きの回転：左回り (反時計回り) の回転
負の向きの回転：右回り (時計回り) の回転

三角関数

定義

三角関数の定義



P を原点中心半径 1 の円周上を A$(1, 0)$ から正の向きに θ ラジアン回転した点とし, P の座標を (x, y) とするとき

$\cos\theta = x$: 余弦

$\sin\theta = y$: 正弦

$\tan\theta = \dfrac{y}{x}$: 正接

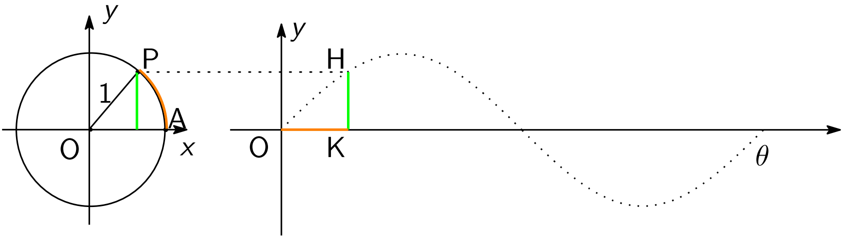
と定める。(分母が 0 となるときは定義しない)

また, これらによって定められる関数 $f(\theta) = \sin\theta$ 等を三角関数という.

三角関数

グラフの作図

[考え方]



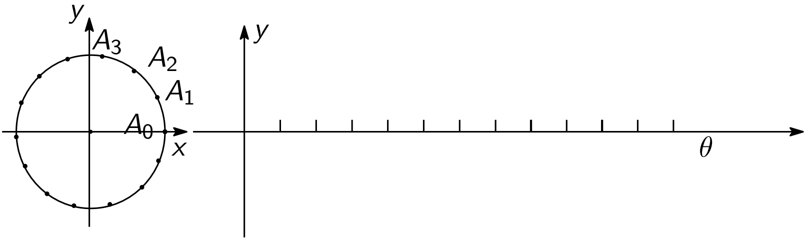
1. x, y 平面に原点中心の半径 1 の円を書き，円周上に点 A$(1, 0)$, P(x, y) をとる。$\angle$AOP$= \theta$ とすると三角関数の定義により，(弧 AP の長さ)$= \theta$, $y = \sin\theta$ となる。

2. 三角関数 $y = \sin\theta$ は θ に対して y を対応させる関数であるから，そのグラフは，θy 平面に点 H(θ, y) をとるとき，P を円周上で動かしたとき H がえがく曲線である。

3. 上の図を用いて $y = \sin\theta$ のグラフを書くには，K$(\theta, 0)$ とするとき，(弧 AP の長さ)=OK $(= \theta)$ となるように点 P をとらなければならない。

三角関数
グラフの作図

[座標軸の用意]



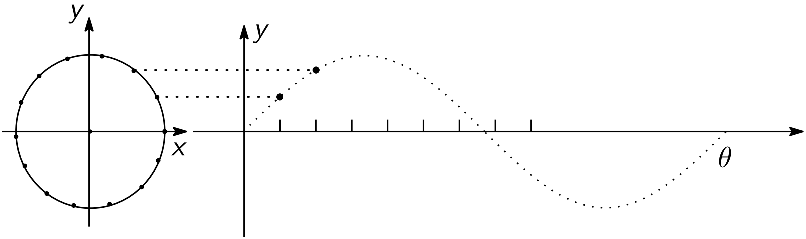
(0)　前のページの 3 のことを実現するために, 円筒のふちにグラフ用紙を細く切って巻き付けたものを使う。
(i) グラフ用紙を横長に使い、左側に xy 平面の座標軸、右側に θy 平面の座標軸を書け。用意した円筒を使って xy 平面に原点中心の円をかけ。円筒の直径を測って円筒の中心が原点に来るようにせよ。

(ii) 円筒に貼り付けてあるグラフ用紙のメモリを利用して、円周上に 1cm 間隔で点を打て。初めの点は x 軸上にとれ。(これらの点を $A_0, A_1, A_2, \cdots$ とする。)

三角関数

グラフの作図

[$y = \sin\theta$ のグラフの作図]

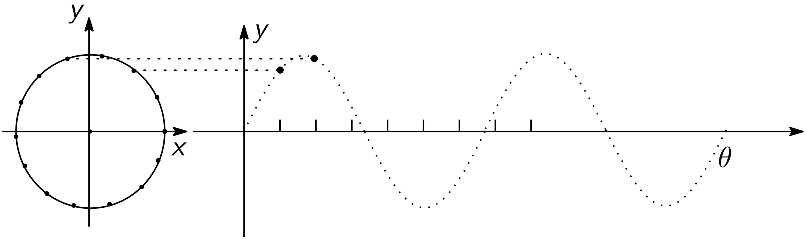


θy 平面に $y = \sin\theta$ のグラフの概形をかこう．円筒の半径を 1 と見なす。
$\theta = 0, 1, 2, \cdots$ に対して y 座標は $A_0, A_1, A_2, \cdots$ の y 座標であるような点を θy 平面に打っていき、なめらかに結べば、円筒の半径を 1 とした $y = \sin\theta$ のグラフがかける。

三角関数

グラフの作図

[$y = \sin 2\theta$ のグラフの作図]

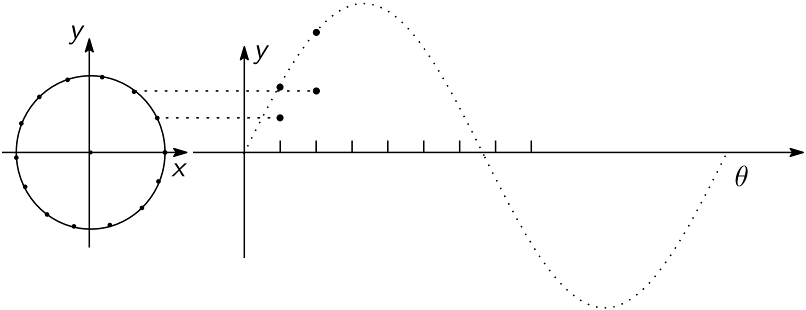


θy 平面に $y = \sin 2\theta$ のグラフの概形をかこう．円筒の半径を 1 と見なす。
$\theta = 0, 1, 2, \cdots$ に対して y 座標は $A_0, A_2, A_4, \cdots$ の y 座標であるような点を θy 平面に打っていき、なめらかに結べば、円筒の半径を 1 とした $y = \sin 2\theta$ のグラフがかける。

三角関数

グラフの作図

[$y = 2\sin\theta$ のグラフの作図]



θy 平面に $y = 2\sin\theta$ のグラフの概形をかこう．円筒の半径を 1 と見なす。
$\theta = 0, 1, 2, \cdots$ に対して y 座標は $A_0, A_1, A_2, \cdots$ の y 座標の 2 倍であるような点を θy 平面に打っていき、なめらかに結べば、円筒の半径を 1 とした $y = 2\sin\theta$ のグラフがかける。

三角関数

グラフの作図

sin のグラフ

(1) $y = \sin\theta$ のグラフは周期 2π で繰り返す波形の曲線である。
(2) $y = \sin 2\theta$ のグラフは $y = \sin\theta$ のグラフを θ 方向に $\dfrac{1}{2}$ に押し縮めたものであり, 周期は半分振動数は 2 倍になる。
(3) $y = 2\sin\theta$ のグラフは $y = \sin\theta$ のグラフを y 方向に 2 倍に拡大したものである。

$\sin 2\theta = 2\sin\theta$ は誤り。

[問題] $y = \sin\left(\theta + \dfrac{\pi}{4}\right)$ のグラフをかけ。