本日やること

1. 不等式
   - $<$ の性質
   - 区間
   - 1 次不等式
   - 1 次不等式
   - 2 次不等式
2. 関数とグラフ
   - 定義
   - 座標平面とグラフ

不等式

"$<$" の性質

"$<$" の性質

2 つの実数 a, b があるとき $a < b$, $a = b$, $a > b$ のどれか一つが成り立ち, 任意の実数 a, b, c に対して

(i) $a < b, b < c \;\Rightarrow\; a < c$

(ii) $a < b \;\Rightarrow\; a + c < b + c, a - c < b - c$

(iii) $a < b, c > 0 \;\Rightarrow\; ac < bc, \dfrac{a}{c} < \dfrac{b}{c}$

$$a < b, c < 0 \;\Rightarrow\; ac > bc, \frac{a}{c} > \frac{b}{c}.$$

「$a < b$ または $a = b$」のことを $a \leqq b$ で表す. $<$ と同様な性質を持つ。

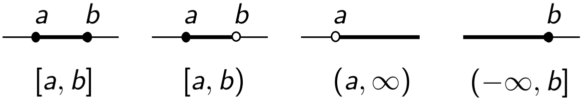
不等式

区間

実数全体の集合を $\mathbb{R}$ で表す。
a, b を実数とするとき

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqq x \leqq b\} : a \leqq x \leqq b \text{ を満たす実数 } x \text{ の集合}$$
$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqq x < b\} : a \leqq x < b \text{ を満たす実数 } x \text{ の集合}$$
$$(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\} : a < x \text{ を満たす実数 } x \text{ の集合}$$
$$(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqq b\} : x \leqq b \text{ を満たす実数 } x \text{ の集合}$$

のような集合を区間という.



不等式
1 次不等式

[例] 1 次不等式

$$3x - 2 > 0 \cdots (\star)$$

(ii) より両辺に 2 を加えても不等式が成り立つから

$$3x - 2 + 2 > 0 + 2 \quad \text{すなわち} \quad 3x > 2$$

(iii) より両辺を 3 でわっても不等式が成り立つから

$$x > \frac{2}{3}$$

したがって $(\star)$ をみたす実数 x の集合は区間 $\left(\frac{2}{3}, \infty\right)$.

不等式

2 次不等式

x の 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の判別式を $D=b^2-4ac$ とする。

2 次不等式の解

$D>0$ のとき $ax^2+bx+c=0$ は二つの異なる実数解 $x=\alpha,\beta$ $(\alpha<\beta)$ を持つが, $a>0$ のとき

(i) $ax^2+bx+c>0$ の解は $x<\alpha$ または $x>\beta$

(ii) $ax^2+bx+c<0$ の解は $\alpha<x<\beta$

$D<0$, $a>0$ のとき $ax^2+bx+c=0$ は実数解を持たないので

(i) $ax^2+bx+c>0$ の解はすべての実数 x

(ii) $ax^2+bx+c<0$ は解を持たない。

不等式
2 次不等式

[確かめ] 因数定理により $ax^2 + bx + c = a(x-\alpha)(x-\beta)$

符号を調べると $a > 0$ だから

x	$x < \alpha$	α	$\alpha < x < \beta$	β	$\beta < x$
$x - \alpha$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x - \beta$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$a(x-\alpha)(x-\beta)$	$+$	0	$-$	0	$+$

だから

(i) $ax^2 + bx + c > 0$ の解は $x < \alpha$ または $x > \beta$

(ii) $ax^2 + bx + c < 0$ の解は $\alpha < x < \beta$

関数

定義

関数の定義

$D \subset \mathbb{R}$

D で定義された関数 f とは $x \in D$ に $y \in \mathbb{R}$ をただ１つ対応させる規則 のこと。

$$f \ : \ D \to \mathbb{R} \qquad \text{または} \qquad D \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

$$f \ : \ x \mapsto y \qquad \text{または} \qquad y = f(x)$$

で表す.

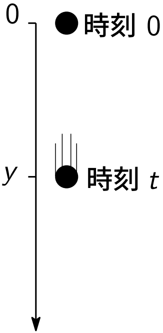
y を x の f による値 といい $f(x)$ で表す。

D : f の定義域 $\quad f(D) = \{f(x) \mid x \in D\}$: f の値域

関数
考え方

関数：ものごとの変化や運動を表現するのに必要

例：自由落体



時刻 t (sec)	0	0.5	1	1.5	2	2.5
位置 y (m)	0	1.225	4.9	11.025	19.6	30.625

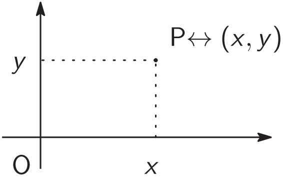
t に対し

$$y = 4.9t^2$$

で決まる y が対応している。

関数

座標平面とグラフ

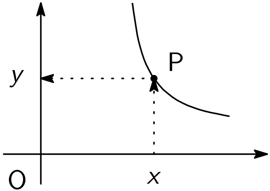


[座標平面]

のとき

(x, y) を 点 P の座標 (または直交座標) という。

グラフの定義



関数 f のグラフとは，座標平面における点の集合

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = f(x),\ x \in D\}$$

のこと．ただし，D は f の定義域．