

本日よりこと

① 数

- 無限小数
- 無理数
- 平方根
- 分母の有理化

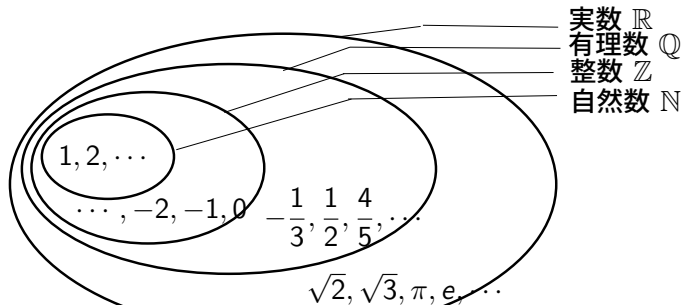
② 文字と式

- 変数
- 未知数と方程式
- 計算規則
- 例題
- 分数式

数

いろいろな数

いろいろな数を習いました。



数の世界

数

いろいろな数

演算ができるように拡張してきた。

	たし算	ひき算	かけ算	わり算 ($\div 0$ 以外)
自然数	○	×	○	×
整数	○	○	○	×
有理数	○	○	○	○
実数	○	○	○	○

では「有理数から実数へ」の拡張は何のため？

⇒ **すべてのものの長さを表せるようにするため**

数

無限小数

正の実数

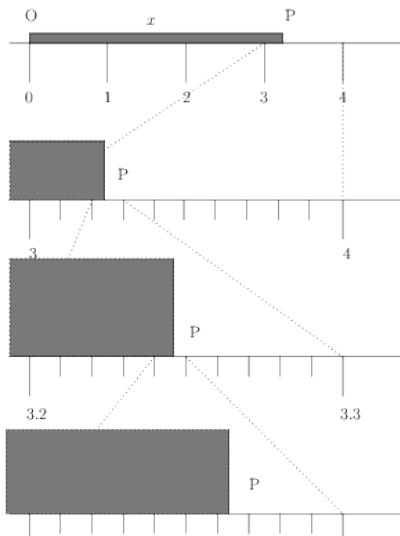
1. 自然数全体にすべての正の（有限または無限）小数を付け加えた集合を正の実数の集合とする。
2. 正の実数を使うと、いかなるものの長さをも表すことができる。

詳しくは

<http://www.eds.it-hiroshima.ac.jp/koyama/MPSuppli/index.html>
を見てください。

数

無限小数



$$3 \leq x \leq 4$$

$$3.2 \leq x \leq 3.3$$

$$3.24 \leq x \leq 3.25$$

$$3.246 \leq x \leq 3.247$$

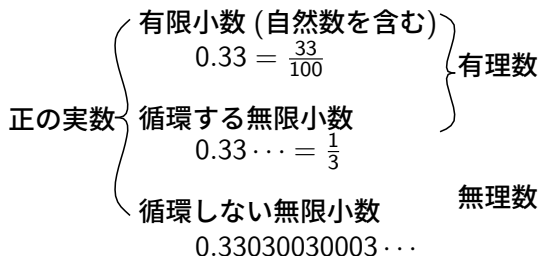
このとき

$$x = 3.247 \dots$$

としてよいだろう。

数

無理数



実は有理数でない実数がある。これを無理数という。

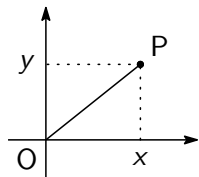
$$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \cdots, \pi, e, \cdots$$

$\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ ($m, n = 1, 2, \cdots$) と表せないことは高校数Ⅰの教科書を見てください。

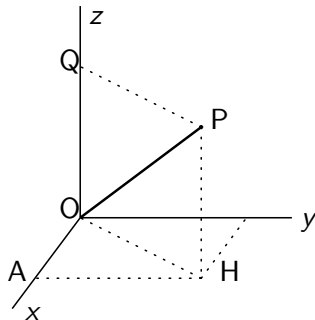
数

平方根

三平方の定理により



$$OP^2 = x^2 + y^2$$



$$OP^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

だから平方根は大事である。

数

平方根

平方根 $\sqrt{\quad}$ の定義と性質

- (i) 実数 a に対し $x^2 = a$ となる実数 x を a の平方根という。
- (ii) $a > 0$ のとき, a の平方根のうち正のものを $\sqrt{a}$ で表す。(このとき $-\sqrt{a}$ も a の平方根となる。) すなわち
$$x = \sqrt{a} \Leftrightarrow x^2 = a, \quad x > 0$$
- (iii) $a = 0$ のときは平方根は 0 だけであり $\sqrt{a} = 0$ である。
- (iv) $a < 0$ のとき, a の平方根は実数の範囲では存在しない。(後に述べるが複素数になる。)

数

平方根

$$\sqrt{(-2)^2} = -2 \text{ は誤り}$$

$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ を使うと見通しが良くなることもある。

$$\begin{aligned}\frac{2}{\sqrt{5} + \sqrt{3}} &= \frac{2(\sqrt{5} - \sqrt{3})}{(\sqrt{5} + \sqrt{3})(\sqrt{5} - \sqrt{3})} \\ &= \frac{2(\sqrt{5} - \sqrt{3})}{(\sqrt{5})^2 - (\sqrt{3})^2} \\ &= \frac{2(\sqrt{5} - \sqrt{3})}{5 - 3} = \sqrt{5} - \sqrt{3}\end{aligned}$$

文字と式

変数・未知数

文字で数を表すことをよくやる。大変役に立つ考え方です。

1. 文字が何でもよい数を表す場合, 変数という。変数を含む式によっていろいろな量を表すことができる。

例: ある遊園地の入場料は大人 300 円子供 150 円である。

大人の入場者数を表す変数を n (人),

子供の入場者数を表す変数を m (人)

とすると入場料の総額は $300n + 150m$ (円) である。

変数にはいろいろな数を代入することができる。代入して得られる数を式の値という。

文字を含む式

未知数・変数

2. 文字がまだわかっていない数を表す場合, 未知数という。

例：ある遊園地の入場料は大人 300 円子供 150 円である。K 先生は一家 5 人で遊園地に行き入場料 1200 円を払った。このことは, 家族のうちの大人の人数を n , 子供の人数を m とすると

$$\begin{cases} n + m = 5, \\ 300n + 150m = 1200 \end{cases}$$

のような等式で表すことが出来る。このような等式を方程式といい, これを満たす数を解という。

文字と式

計算規則

文字を含む式は数と同じように計算することができる。そのときの計算規則は数と同じである。

(I) 演算に関する性質

a, b, c を任意の数または式とするとき

(i) 加法の交換法則 $a + b = b + a$

(ii) 加法の結合法則 $(a + b) + c = a + (b + c)$

(iii) 乗法の交換法則 $ab = ba$

(iv) 乗法の結合法則 $(ab)c = a(bc)$

(v) 分配法則 $a(b + c) = ab + ac$

が成り立つ。

文字と式

計算規則

(II) 等号に関する性質

a, b, c を任意の数または式とするとき

$$(i) a = a, \quad (ii) a = b \Rightarrow b = a \quad (iii) a = b, b = c \Rightarrow a = c$$

$$(iv) a = b \Rightarrow$$

$$a + c = b + c, a - c = b - c, ac = bc, \frac{a}{c} = \frac{b}{c} \quad (\text{ただし } c \neq 0)$$

$$f(a) = f(b),$$

(ただし $f(x)$ は x を含む任意の式である。これを代入原理という。)

式の計算

方程式

[例題] あるお金持ちが x 万円の財産を持っていた。そのうち 300 万円を 1 年の生活費に充てて、残りを投資して $\frac{4}{3}$ 倍に増やした。このことを 3 年繰り返したら財産が倍になった。(Newton より改変)

式で表すと

元の財産 x

1 年目の残高 $(x - 300) \cdot \frac{4}{3}$

2 年目の残高 $((x - 300) \cdot \frac{4}{3} - 300) \cdot \frac{4}{3}$

3 年目の残高 $((((x - 300) \cdot \frac{4}{3} - 300) \cdot \frac{4}{3} - 300) \cdot \frac{4}{3})$

だから $((((x - 300) \cdot \frac{4}{3} - 300) \cdot \frac{4}{3} - 300) \cdot \frac{4}{3}) = 2x$

式の計算

方程式

$$\text{分配法則より } x \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^3 - 300 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^3 - 300 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^2 - 300 \cdot \frac{4}{3} = 2x$$

$$\text{計算すると } \frac{64}{27}x - \frac{14800}{9} = 2x$$

$$\text{(II)(iv) より両辺から } 2x \text{ を引いて } \frac{14800}{9} \text{ を加えても等号が成り立つ}$$

から

$$\frac{64}{27}x - 2x = \frac{14800}{9}$$

$$\text{分配法則より } \left(\frac{64}{27} - 2\right)x = \frac{14800}{9}$$

$$\text{計算すると } \frac{10}{27}x = \frac{14800}{9}$$

$$\text{(II)(iv) より両辺を } \frac{10}{27} \text{ でわっても等号が成り立つから}$$

$$x = \frac{14800}{9} \div \frac{10}{27} = 4440$$

式の計算

おまけ

ニュートン：「文章の中に 数とか量の関係が出てくる問題を解くには、問題を英語またはその他の言語から量の間の関係を表すのに適した代数の言葉にほんやくする以外に何もする必要はない。」

ライブニッツ：「式が代わりに考えてくれる。」

子供時代のアインシュタイン：「おじさん。代数ってなあに？」

アインシュタインのおじさん：「ずるい算数だよ。」

文字と式

分数式

分数式の計算

分母分子に 0 でない同じ数や式をかけてもわっても値は変わらない。
二つの分数式をたす（ひく）には、通分により分母を共通にして分子どうしをたす（ひく）。

分数式のかけ算は分母どうし、分子どうしかける。

分数式のわり算は分母分子をいれかえてかける。

$$\frac{4}{6a^2 + 1} = \frac{2}{3a^2 + 1} \text{ は誤り。}$$

$$\frac{4}{6a^2 + 1} = \frac{4 \times \frac{1}{2}}{(6a^2 + 1) \times \frac{1}{2}} = \frac{2}{3a^2 + \frac{1}{2}} \text{ が正しい。}$$