

## 電気リメディアル数学講座 第12回 解答

問題 1. (1)  $z_1 = 3 + i$ ,  $z_2 = 2 + i$  とするとき, 次のものを計算せよ.

$$z_1 z_2 = (3 + i)(2 + i) = 6 + 3i + 2i + i^2 = 5 + 5i$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3 + i}{2 + i} = \frac{(3 + i)(2 - i)}{(2 + i)(2 - i)} = \frac{7 - i}{4 - (i)^2} = \frac{7}{5} - \frac{1}{5}i$$

$$|z_1| = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10} \cdots \textcircled{1} \quad (= \sqrt{3^2 + i^2} = \sqrt{8} \text{ は誤り})$$

$$|z_2| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5} \cdots \textcircled{2}$$

$$|z_1 z_2| = |5 + 5i| = \sqrt{5^2 + 5^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2} \cdots \textcircled{3}$$

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \left| \frac{7}{5} - \frac{1}{5}i \right| = \sqrt{\left(\frac{7}{5}\right)^2 + \left(\frac{1}{5}\right)^2} = \frac{\sqrt{50}}{5} = \sqrt{2}$$

(2)  $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$  を確かめよ.

①, ②, ③ より確かにそうになっている。

問題 2. (1) 複素数と回し伸ばしの原理を使って  $\cos(\theta_1 - \theta_2)$  と  $\sin(\theta_1 - \theta_2)$  を  $\sin \theta_1$ ,  $\sin \theta_2$ ,  $\cos \theta_1$ ,  $\cos \theta_2$  で表せ.

$z_1 = \cos \theta_1 + i \sin \theta_1$ ,  $z_2 = \cos \theta_2 + i \sin \theta_2$  とおくと,

$$|z_1| = |z_2| = 1, \quad \arg z_1 = \theta_1, \quad \arg z_2 = \theta_2$$

だから回し伸ばしの原理により

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} = 1, \quad \arg \frac{z_1}{z_2} = \arg(z_1) - \arg(z_2) = \theta_1 - \theta_2$$

したがって

$$\frac{z_1}{z_2} = 1(\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2))$$

つまり

$$\frac{\cos \theta_1 + i \sin \theta_1}{\cos \theta_2 + i \sin \theta_2} = \cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2) \cdots (\star)$$

ところで

$$\begin{aligned}
 (\star) \text{ の左辺} &= \frac{\cos \theta_1 + i \sin \theta_1}{\cos \theta_2 + i \sin \theta_2} = \frac{(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)(\cos \theta_2 - i \sin \theta_2)}{(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)(\cos \theta_2 - i \sin \theta_2)} \\
 &= \frac{\cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2 + i(\sin \theta_1 \cos \theta_2 - \cos \theta_1 \sin \theta_2)}{\cos^2 \theta_2 + \sin^2 \theta_2} \\
 &= \cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2 + i(\sin \theta_1 \cos \theta_2 - \cos \theta_1 \sin \theta_2)
 \end{aligned}$$

ここで  $(\star)$  の両辺の実部虚部を比較して

$$\cos(\theta_1 - \theta_2) = \cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2$$

$$\sin(\theta_1 - \theta_2) = \sin \theta_1 \cos \theta_2 - \cos \theta_1 \sin \theta_2$$

(2)  $\cos(2\theta)$  を  $\sin \theta, \cos \theta$  で表せ. (2倍角の公式)

回し伸ばしの原理により

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^2 = \cos 2\theta + i \sin 2\theta$$

一方

$$\text{左辺} = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta + 2i \cos \theta \sin \theta$$

だからこの実部を比較して

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$$