

## 電気リメディアル数学講座 第10回 解答

問題 1. 次の値を求めよ.

$$(1) 3^{-2} = \frac{1}{9} \quad \text{だから} \quad \log_3 \frac{1}{9} = -2$$

$$(2) 3^2 = 9 \quad \text{だから} \quad \log_3 9 = 2$$

$$(3) 3^1 = 3 \quad \text{だから} \quad \log_3 3 = 1$$

$$(4) 3^0 = 1 \quad \text{だから} \quad \log_3 1 = 0$$

$$(5) 2^{-3} = \frac{1}{8} \quad \text{だから} \quad \log_2 \frac{1}{8} = -3$$

$$(6) \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 8 \quad \text{だから} \quad \log_{\frac{1}{2}} 8 = -3$$

$$(7) 3^{\log_3 5} = M \quad \text{とおくと, } \log_3 M = \log_3 5 \quad \text{だから} \quad M = 5.$$

$$(8) \log_2 \left(2^{\frac{1}{2}}\right) = p \quad \text{とおくと, } 2^p = 2^{\frac{1}{2}} \quad \text{だから} \quad p = \frac{1}{2}$$

問題 2 確かめよ. ただし  $a > 0$ ,  $M > 0$ ,  $N > 0$ ,  $k$  は実数.

$$\log_a (M^k) = k \log_a M$$

[確かめ]  $\log_a M = p$  とおく.  $\log_a$  の定義により  $a^p = M$  である. したがって  $M^k = (a^p)^k$  であるが, さらに指数法則により  $(a^p)^k = a^{kp}$  である. だから  $M^k = a^{kp}$  である. 再び  $\log_a$  の定義により  $\log_a (M^k) = kp = k \log_a M$  である.

問題 3.  $x, y, z > 0$  のとき,  $X = \log_a x$ ,  $Y = \log_a y$ ,  $Z = \log_a z$ . 次の式を  $X, Y, Z$  で表せ. ただし,  $a > 0$ ,  $a \neq 1$  とする.

$$\begin{aligned} (1) \log_a (x^3 y^2 z) &= \log_a (x^3) + \log_a (y^2) + \log_a (z) \\ &= 3 \log_a (x) + 2 \log_a (y) + \log_a (z) \end{aligned}$$

$$= 3X + 2Y + Z$$

$$\begin{aligned} (2) \log_a \frac{xy^2}{z^3} &= \log_a(x) + \log_a(y^2) - \log_a(z^3) \\ &= \log_a(x) + 2\log_a(y) - 3\log_a(z) \\ &= X + 2Y - 3Z \end{aligned}$$

**問題 4.** 次の等式を満たす  $x$  の値を求めよ.

$$(1) \log_{\sqrt{2}} 2\sqrt{2} = x$$

定義より,  $\sqrt{2}^x = 2\sqrt{2}$ .

$\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$  だから

右辺  $= (2^{\frac{1}{2}})^x = 2^{\frac{x}{2}}$ .

左辺  $= 2^1 \times 2^{\frac{1}{2}} = 2^{1+\frac{1}{2}} = 2^{\frac{3}{2}}$ .

したがって,  $\frac{x}{2} = \frac{3}{2}$ ,  $x = 3$ .

$$(2) \log_3 x = -2$$

定義より,  $3^{-2} = x$ .

$3^{-2} = \frac{1}{9}$  だから

$x = \frac{1}{9}$ .

**問題 5** (1) 空欄を埋めよ.

$x$	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2
$2^x$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	$\sqrt{2}$	2	4
$(\frac{1}{2})^x$	4	2	$\sqrt{2}$	1	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

(2)  $y = 2^x$ ,  $y = (\frac{1}{2})^x$  のグラフを書け.

Excel のファイルで出してください。

**問題 6**  $a, x, y, z$  を正の数とし,  $a \neq 1$  とする. 次の式を簡単にせよ.

$$(1) \log_a 1 = 0.$$

$$(2) \log_a a = 1$$

$$(3) \log_3 4 - \log_3 12 = \log_3 \frac{4}{12} = \log_3 \frac{1}{3} = \log_3 3^{-1} = -\log_3 3 = -1.$$

$$(4) \log_2 3 \times \log_3 2 = 1.$$

$$\text{底の変換公式により } \log_3 2 = \frac{\log_2 2}{\log_2 3} = \frac{1}{\log_2 3}.$$

$$\text{したがって } \log_2 3 \times \log_3 2 = 1.$$

$$(5) \log_6 2 + \log_6 3 = \log_6(2 \times 3) = \log_6 6 = 1.$$

$$(6) \log_3 \sqrt{27} = \log_3 3^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}.$$

$$(7) \log_3 \sqrt[3]{12} - \frac{2}{3} \log_3 2 = \log_3 \sqrt[3]{3 \times 2^2} - \log_3 2^{\frac{2}{3}} = \log_3 \left( \frac{3^{\frac{1}{3}} 2^{\frac{2}{3}}}{2^{\frac{2}{3}}} \right) = \log_3 3^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}.$$

$$(8) (\log_2 9 + \log_4 3)(\log_3 4 + \log_9 8) = \frac{35}{4}.$$

底の変換公式を用いて底を2に統一すると

$$\begin{aligned} & (\log_2 9 + \log_4 3)(\log_3 4 + \log_9 8) \\ &= \left( \frac{\log_2 9}{\log_2 2} + \frac{\log_2 3}{\log_2 4} \right) \left( \frac{\log_2 4}{\log_2 3} + \frac{\log_2 8}{\log_2 9} \right) = \left( \frac{\log_2 3^2}{\log_2 2} + \frac{\log_2 3}{\log_2 2^2} \right) \left( \frac{\log_2 2^2}{\log_2 3} + \frac{\log_2 2^3}{\log_2 3^2} \right) \\ &= \left( 2 \log_2 3 + \frac{\log_2 3}{2} \right) \left( 2 \frac{1}{\log_2 3} + \frac{3}{2 \log_2 3} \right) = \frac{35}{4}. \end{aligned}$$