電気リメディアル数学講座　第 5 回 解答

1. 次の推論は正しいか。正しいときは証明を与え, 正しくないときは反例を作れ.

証明に使うことのできる基本性質は, 授業スライドの「$<$ の性質」(i), (ii), (iii) と, $<$ を ((iii), (iii)' の $c > 0$, $c < 0$ 以外) $\leqq$ で置き換えたものである.

すべて直感的に明らかに思えるかも知れないが、勝手な思い込みで計算すると間違いを起こすことがあるので「基本的なルールのみから証明する」ことをいちどやっておこう。

(1) 任意の実数 A, B, C, D に対して

$$A \leqq B, C \leqq D \ \Rightarrow \ A + C \leqq B + D$$

は正しい. なぜなら

$A \leqq B$ の両辺に C を加えると (ii) より $A + C \leqq B + C$.

$C \leqq D$ の両辺に B を加えると (ii) より　　　$B + C \leqq B + D$

がわかるので, (i) より　$A + C \leqq B + D$

がわかるからである.

「$A = 1$, $B = 2$, $C = 2$, $D = 3$ のとき成り立つから正しい」というのはダメである。他の場合もすべて調べなくてはならないからである。そんなことは無理であり、そのために「正しいと認められた基本的なルール」から論証するという方法をとるのである。

(2) 任意の実数 A に対して $A^2 \geqq 0$ は正しい. なぜなら

i)　$A = 0$ のときは $A^2 = 0 \times 0 = 0$ だから明らか.

ii) $A > 0$ のときは両辺に A をかけると (iii) より

　$A \times A > 0 \times A = 0$ だから

　$A^2 > 0$

iii)$A < 0$ のときは両辺に A をかけると (iii)' により大小関係が反転して

　$A \times A > 0 \times A = 0$ だから

　$A^2 > 0$

i), ii), iii) によりいつでも $A^2 \geqq 0$ が成り立つ.

(3) 任意の実数 A, B に対して

$$A^2 \leqq B^2, \ \Rightarrow \ A \leqq B$$

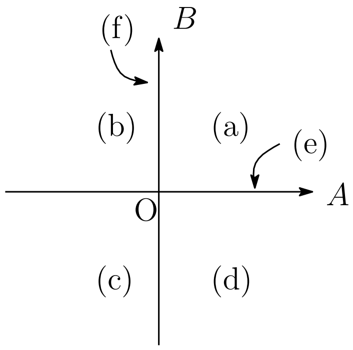
は正しくない．なぜなら $A=1$, $B=-2$ とすると $A^2 \leqq B^2$ は成り立つが $A \leqq B$ は成り立たない．これが反例である．

正しいことを示すには「すべての場合に正しい」ことを示さなくてはならないが, 正しくないことを示すには「成り立たない場合が少なくとも一つある」ことを示せば十分である。

(4) 任意の実数 A, B に対して

$$AB > 0 \quad \Leftrightarrow \quad A \text{ と } B \text{ は同符号}$$

は正しい．以下確かめる．



座標平面を考え, 実数の組 (A,B) を平面上の点の座標と考えると, (A,B) は図のように 4 つの象限と 2 本の座標軸で場合分けされる．**基本事項 1** (iii), (iii)' により

(a)　(A,B) が第 1 象限にある．　$\Longleftrightarrow$　$A>0, B>0$　$\Rightarrow$　$AB>0$

(b)　(A,B) が第 2 象限にある．　$\Longleftrightarrow$　$A<0, B>0$　$\Rightarrow$　$AB<0$

(c)　(A,B) が第 3 象限にある．　$\Longleftrightarrow$　$A<0, B<0$　$\Rightarrow$　$AB>0$

(d)　(A,B) が第 4 象限にある．　$\Longleftrightarrow$　$A>0, B<0$　$\Rightarrow$　$AB<0$

(e)　(A,B) が x 軸上にある．　$\Longleftrightarrow$　$A=0$　$\Rightarrow$　$AB=0$

(f)　(A,B) が y 軸上にある．　$\Longleftrightarrow$　$B=0$　$\Rightarrow$　$AB=0$

であり，これらの 6 つの場合はすべて同時には起こらない。だから $AB>0$ となるのは (a), (c) の場合であることが分かるので正しい．

2. (1) $-3x+5 < -x+3$

基本性質 (ii) により

$-3x+5-5 < -x+3-5$

すなわち

$-3x < -x - 2$

基本性質 (ii) により

$-3x + x < -x - 2 + x$

すなわち

$-2x < -2$

基本性質 (iii)' により

$\dfrac{-2x}{-2} > \dfrac{-2}{-2}$

すなわち

$x > 1$

(2) $x^2 < 4$

2 次方程式 $x^2 - 4 = 0$ の解は $x = \pm 2$ だから因数定理により $x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$ と因数分解できる. $x-2$ と $x+2$ の符号使って $(x-2)(x+2)$ の符号を調べると

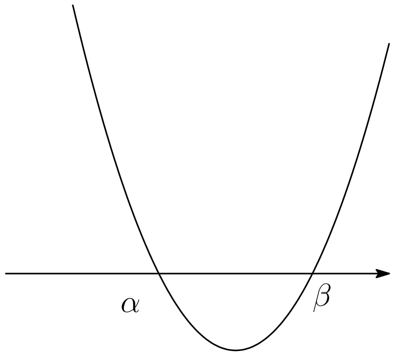
x		-2		2	
$x+2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$(x+2)(x-2)$	$+$	0	$-$	0	$+$

となる. したがって $(x+2)(x-2) < 0$ となる x の値の範囲は

$-2 < x < 2$

である.

二次関数 $y = (x-\alpha)(x-\beta)$ のグラフが



のようであることを知っていれば、これを使う方が早い。

(3) $2x^2+x-6=0$ の解は解の公式により

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1-4\cdot 2\cdot(-6)}}{4}=-2,\frac{3}{2}$$

だから

$$2x^2+x-6=\left(x-\frac{3}{2}\right)(x+2)$$

と因数分解できる. 前問と同様にして符号を調べると

$$\left(x-\frac{3}{2}\right)(x+2)\leqq 0$$

となるのは

$$-2\leqq x\leqq\frac{3}{2}$$

のときであることがわかる。

(4) $x^3-2x^2-x>0$

前問と同様にして

$$x^3-2x^2-x=x(x-1-\sqrt{2})(x-1+\sqrt{2})$$

と因数分解できることがわかるから (2) と同様にして符号を調べる。

x		$1-\sqrt{2}$		0		$1+\sqrt{2}$	
$x-1-\sqrt{2}$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
x	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-1+\sqrt{2}$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$(x-1+\sqrt{2})x(x-1-\sqrt{2})$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

だから $x^3-2x^2-x>0$ となるのは

$$1-\sqrt{2}<x<0,\ 1+\sqrt{2}<x$$

の場合である。