

本日よりこと

① 行列の対角化

- 復習：固有値・固有ベクトルの定義・行列の対角化
- 対称行列の直交行列による対角化
- 2次形式

固有値・固有ベクトル

復習：固有値・固有ベクトル・行列の対角化

[復習：固有値・固有ベクトルの定義] A : 正方行列に対して

$$\lambda : \text{固有値}, \quad \boldsymbol{x} : \text{固有ベクトル} \quad \iff \quad \boldsymbol{Ax} = \lambda\boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$$

行列の対角化

対角化可能となる条件

[復習：対角化可能性] n 次正方行列 A について次の (i), (ii) は同値である：

(i) A は n 個の線形独立な固有ベクトル $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$ を持つ。

(ii) A は正則行列 P によって

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

と変形される。これを**対角化**という。このとき

$$P = \begin{pmatrix} \color{green} \mathbf{u}_1 & \color{green} \mathbf{u}_2 & \cdots & \color{green} \mathbf{u}_n \end{pmatrix}, \quad \lambda_1, \dots, \lambda_n \text{ は固有値}$$

行列の対角化

対称行列の直交行列による対角化

対称行列と内積

$A = {}^tA$ となる行列を **対称行列** という。

A が対称行列 \iff 任意のベクトル u, v に対して $(Au) \cdot v = u \cdot (Av)$

[確かめ] \Rightarrow :

左辺 $= {}^t(Au)v = {}^tu{}^tAv = {}^tuAv =$ 右辺

\Leftarrow :

行列の対角化

対称行列の直交行列による対角化

対称行列の固有ベクトル

- (I) n 次対称行列は n 個の固有ベクトル $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}$ を持つ.
- (II) $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}$ は大きさ 1 で互いに直交するとしてよい.

(I) の証明は省略します。

[(II) の確かめ] (i) 相異なる固有値に対する固有ベクトルは直交する。なぜなら

$$\lambda \neq \mu, \quad A\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}, \quad A\mathbf{v} = \mu\mathbf{v}$$

とすると

$$\lambda\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = A\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot A\mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \mu\mathbf{v} = \mu(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$$

だから $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$.

(ii) 同じ固有値に対する固有ベクトルでも互いに直交するとしてよい。たとえば

$A\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}, A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}, |\mathbf{u}| = 1$ のとき,

$$\bar{\mathbf{v}} = \mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u})\mathbf{u} \quad \text{とすると} \quad A\bar{\mathbf{v}} = \lambda\bar{\mathbf{v}}, \quad \bar{\mathbf{v}} \perp \mathbf{u}$$

だから \mathbf{v} のかわりに $\bar{\mathbf{v}}$ をとればよい。3 つ以上のベクトルの場合も同様に考える。

行列の対角化

対称行列の直交行列による対角化

対称行列の直交行列による対角化

対称行列 A は直交行列 T によって

$${}^tTAT = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

のように対角化できる. ここで $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ は A の固有値となる.

[考え方] 固有ベクトル $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}$ を大きさ 1 で互いに直交するようにとり

$$T = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$$

とすればよい。

行列の対角化

2次形式

2次形式の定義

対称行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ に対して x, y の二次式

$$(x, y)A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} (= ax^2 + 2bxy + cy^2)$$

を (2変数の)2次形式という。

行列の対角化

2次形式

2次形式の標準形

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ が直交行列 $T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix}$ によって

$${}^tTAT = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$$

のように対角化されているとき、2次形式は

$$(x, y)A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x', y') \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \lambda x'^2 + \mu y'^2$$

のように変形される。ただし

$$x' = t_{11}x + t_{12}y, \quad y' = t_{21}x + t_{22}y$$

である。これを **2次形式の標準形** という。

行列の対角化

2 次形式

[例] $(x, y) \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 3x^2 - 2xy + 3y^2$ の標準形を求める。

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \text{ とおく。}$$

\mathbf{A} の固有値 : $\lambda = 2, 4,$

$$\lambda = 2 \text{ に対する固有ベクトル : } \mathbf{p}_1 = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\text{大きさ 1 のものは } \mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\lambda = 4 \text{ に対する固有ベクトルは } \mathbf{p}_2 = c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\text{大きさ 1 のものは } \mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

行列の対角化

2 次形式

だから直交行列 $T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ により

$$(x, y) \mathbf{A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x', y') \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = 2x'^2 + 4y'^2$$

のように変形される。ただし

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = {}^t T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y \end{pmatrix}$$

行列の対角化

2次形式

