# 本日やること

1. 固有値・固有ベクトル
   - 固有値・固有ベクトルの定義
   - 固有値・固有ベクトルの計算

# 固有値・固有ベクトル

## 固有値・固有ベクトルの定義

**固有値・固有ベクトルの定義**

正方行列 $\boldsymbol{A}$ に対し列ベクトル $\boldsymbol{x}$, 複素数 $\lambda$ が

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$$

となるとき

$\lambda$ ： $\boldsymbol{A}$ の固有値

$\boldsymbol{x}$ ： 固有値 $\lambda$ に対する固有ベクトル

という。

# 固有値・固有ベクトル

## 固有値・固有ベクトルの定義

[例]

$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とするとき

$\boldsymbol{A}$ の固有値は　$1$ と $2$

固有値 $1$ に対する固有ベクトルは $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

固有値 $2$ に対する固有ベクトルは $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

[確かめ]

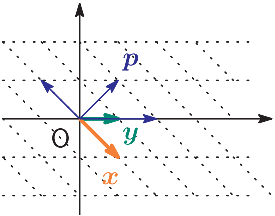
$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 1 \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 1 \times \boldsymbol{x}$$

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \times \boldsymbol{y}$$

# 固有値・固有ベクトル

## 固有値・固有ベクトルの定義

固有値・固有ベクトルによって線形変換の様子がよくわかる。



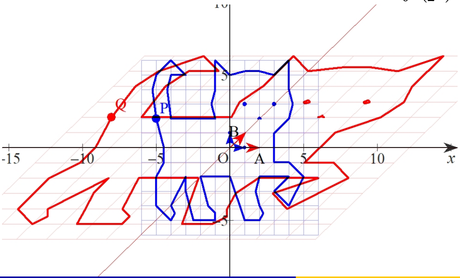

$\boldsymbol{A}$ によって決まる線形変換を $f$ とする。$f$ は
ベクトルを

$\boldsymbol{x}$ 方向に 1 倍ひきのばすから $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$

$\boldsymbol{y}$ 方向に 2 倍ひきのばすから $f(\boldsymbol{y}) = 2\boldsymbol{y}$

図のベクトル $\boldsymbol{p}$ は $\boldsymbol{p} = -\boldsymbol{x} + 2\boldsymbol{y}$ だから

$$f(\boldsymbol{p}) = -f(\boldsymbol{x}) + 2f(\boldsymbol{y}) = -\boldsymbol{x} + 4\boldsymbol{y}$$



# 固有値・固有ベクトル

## 固有値・固有ベクトルの計算

**固有値の求め方**

正方行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値 $\lambda$ は

$$|\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E}| = 0 \quad \text{(これを 固有方程式という)}$$

の解である。

[確かめ]　$\lambda$ が $\boldsymbol{A}$ の固有値, $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ が固有ベクトルならば $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ であるが

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x} \iff \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \lambda\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \iff (\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{E})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \cdots (\star)$$

ところで $\boldsymbol{B}$ : 正方行列, $\boldsymbol{x}$ : 列ベクトル に対して

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \text{ の解は } \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \text{ のみ} \iff \boldsymbol{B} \text{ は正則行列} \iff |\boldsymbol{B}| \neq 0$$

であった。(P.102, P106) だから $(\star)$ が $\boldsymbol{0}$ でない解 $\boldsymbol{x}$ を持つ条件は

$$|\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E}| = 0$$

# 固有値・固有ベクトル

## 固有値・固有ベクトルの計算

**注意：固有値が複素数になる場合**

1. 固有方程式は実数解を持たない場合があるが複素数の解は必ずあるので, 固有値は複素数と考えることにする。

2. ベクトル, 行列も成分が複素数であるものを考える。

3. 成分が複素数であるベクトル, 行列の演算も, 実数成分の場合と全く同じに考える.

# 固有値・固有ベクトル
## 固有値・固有ベクトルの計算

[例]

$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (90° 回転を起こす行列) の固有値, 固有ベクトルを計算する。

固有方程式

$$|\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E}| = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0$$

を解いて固有値は $\lambda = \pm i$.

これに対応する固有ベクトルを $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ とすると

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \pm i \boldsymbol{x} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \pm i \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -x_2 = \pm i x_1 \\ x_1 = \pm i x_2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow x_2 = \mp i x_1$$

だから $\boldsymbol{x} = c \begin{pmatrix} 1 \\ \mp i \end{pmatrix}$ ($c$ は 0 でない任意の複素数)

# 固有値・固有ベクトル

## 固有値・固有ベクトルの計算

[例題 1]　$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ の固有値, 固有ベクトルを計算する。

(Step 1)　固有値を求める。 固有方程式

$$|\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E}| = \left| \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -5 \\ 2 & -3-\lambda \end{vmatrix}$$
$$= \lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda + 1)(\lambda - 2) = 0$$

を解いて固有値は $\lambda = -1, 2$.

# 固有値・固有ベクトル
## 固有値・固有ベクトルの計算

(Step 2) $\lambda = 2$ に対する固有ベクトルを求める。

$$\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 4x_1 - 5x_2 = 2x_1 \\ 2x_1 - 3x_2 = 2x_2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2x_1 - 5x_2 = 0 \\ 2x_1 - 5x_2 = 0 \end{cases} \iff x_2 = \frac{2}{5} x_1$$

だから固有ベクトルは

$$\boldsymbol{x} = c \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix} = c' \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} \ (c, c' \text{は 0 でない定数})$$

# 固有値・固有ベクトル

## 固有値・固有ベクトルの計算

(Step 3) $\lambda = -1$ に対する固有ベクトルを求める。

$$\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 4x_1 - 5x_2 = -x_1 \\ 2x_1 - 3x_2 = -x_2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 5x_1 - 5x_2 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases} \iff x_2 = x_1$$

だから固有ベクトルは

$$\boldsymbol{x} = c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \ (c, \text{は 0 でない定数})$$

# 固有値・固有ベクトル

## 固有値・固有ベクトルの計算

[例題 2] $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 0 & 5 & -4 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ の固有値, 固有ベクトルを計算する。

(Step 1) 固有方程式を解いて固有値を求める。

$$
\begin{aligned}
|\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E}| &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & -3 & 4 \\ 0 & 5-\lambda & -4 \\ 1 & 3 & -1-\lambda \end{vmatrix} \quad \text{第 3 行を } 2-\lambda \text{ 倍して引く} \\
&= \begin{vmatrix} 0 & -3-3(2-\lambda) & 4-(-1-\lambda)(2-\lambda) \\ 0 & 5-\lambda & -4 \\ 1 & 3 & -1-\lambda \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 0 & 3(\lambda-3) & -(\lambda+2)(\lambda-3) \\ 0 & 5-\lambda & -4 \\ 1 & 3 & -1-\lambda \end{vmatrix} \quad \text{第 1 行から } \lambda-3 \text{ をくくりだす}
\end{aligned}
$$

# 固有値・固有ベクトル

## 固有値・固有ベクトルの計算

$$
\begin{aligned}
&= (\lambda - 3) \begin{vmatrix} 0 & 3 & -(\lambda + 2) \\ 0 & 5 - \lambda & -4 \\ 1 & 3 & -1 - \lambda \end{vmatrix} \\
&= (\lambda - 3)\, 1\, (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 3 & -(\lambda + 2) \\ 5 - \lambda & -4 \end{vmatrix} \\
&= -(\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0
\end{aligned}
$$

を解いて固有値は $\lambda = 1, 2, 3.$

# 固有値・固有ベクトル

## 固有値・固有ベクトルの計算

(Step 2) $\lambda = 1$ に対する固有ベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ を求める。

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 0 & 5 & -4 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 1 \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\
\iff &\left( \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 0 & 5 & -4 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\iff &\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 0 & 4 & -4 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

を解けばよい。

# 固有値・固有ベクトル

## 固有値・固有ベクトルの計算

Gauss の消去法で解く.

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & 0 \\ 1 & 3 & -2 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 6 & -6 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

だから

$$\begin{cases} x_1 \quad +x_3 = 0 \\ \quad x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

$x_3 = c$ とおいて

$$\boldsymbol{x} = c \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad c \text{ は 0 でない任意の数}$$

# 固有値・固有ベクトル

## 固有値・固有ベクトルの計算

(Step 3,4)　同様にして

$\lambda = 2$ に対する固有ベクトルは $c\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$　　($c$ は 0 でない任意の数)

$\lambda = 3$ に対する固有ベクトルは $c\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$　　($c$ は 0 でない任意の数)