

# 本日よりこと

## ① 線形変換

- 復習:線形変換
- 図形の変換

# 線形変換

## 復習:線形変換

[線形変換] 平面の点  $P(x, y)$  に対して,

$$(*) \quad \begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases} \quad a, b, c, d : \text{は定数}$$

によって平面の点  $P'(x', y')$  を対応させる働きを線形変換という.

$$f : (x, y) \mapsto (x', y') \quad \text{または} \quad f(x, y) = (x', y')$$

で表す.

$$(*) \iff \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{だから} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{を } f \text{ を表す行列という}$$

# 線形変換

復習:線形変換

$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \mathbf{p}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$  においてベクトル  $\mathbf{p}$  をベクトル  $\mathbf{p}'$  に移す変換とみて

$$f: \mathbf{p} \mapsto \mathbf{p}' \quad \text{または} \quad f(\mathbf{p}) = \mathbf{p}'$$

とも表す.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \mathbf{A} \quad \text{とおくと}$$

$$f(\mathbf{p}) = \mathbf{A}\mathbf{p}$$

である。

# 線形変換

## 復習：線形変換の性質

### 線形変換の基本性質

$\mathbf{p}, \mathbf{q}$  は任意のベクトル,  $k, l$  は任意の実数とする。次の [1], [2], [3] は同値である。

[1]  $f$  は線形変換である。 (つまりある行列  $A$  があって  $f(\mathbf{p}) = A\mathbf{p}$ )

[2]  $f(\mathbf{p} + \mathbf{q}) = f(\mathbf{p}) + f(\mathbf{q})$ ,  $f(k\mathbf{p}) = kf(\mathbf{p})$ , ( $k$  は実数)

[3]  $f(k\mathbf{p} + l\mathbf{q}) = kf(\mathbf{p}) + lf(\mathbf{q})$

# 線形変換

## 図形の変換

$G$ : 平面の点の集合 (つまり「図形」)

に対して

$G' = \{f(P) | P \in G\}$  (これを  $f(G)$  と書く)

を  $G$  の  $f$  による像という.

## 線形変換

## 図形の変換

復習：平面の直線・線分

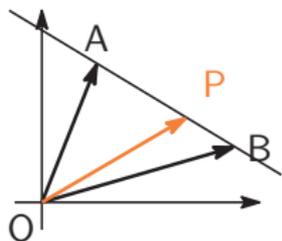
平面の異なる2点  $A(a_1, a_2)$ ,  $B(b_1, b_2)$  に対して

(i)  $P$  が直線  $AB$  上にある

$$\iff \vec{OP} = t\vec{OA} + s\vec{OB}, t + s = 1 \text{ となる実数 } t, s \text{ がある}$$

(ii)  $P$  が線分  $AB$  上にある

$$\iff \vec{OP} = t\vec{OA} + s\vec{OB}, t + s = 1, t \geq 0, s \geq 0 \text{ となる実数 } t, s \text{ がある}$$



[確かめ]

$P$  が直線  $AB$  上にある  $\iff \vec{AP}, \vec{AB}$  は平行

$$\iff \vec{AP} = s\vec{AB}$$

$$\iff \vec{OP} = (1-s)\vec{OA} + s\vec{OB} \quad (1-s = t \text{ とおけ})$$

線分のときは  $0 \leq s \leq 1$

# 線形変換

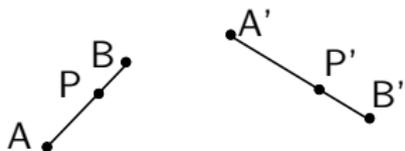
## 図形の変換

### 線分の像

$f$  を線形変換とし  $f(A) = A'$ ,  $f(B) = B'$  ... (\*) とするとき, 線分  $AB$  の像は線分  $A'B'$  または点  $A' (= B')$  である.

(\*) は  $f(\overrightarrow{OA}) = \overrightarrow{OA'}$ ,  $f(\overrightarrow{OB}) = \overrightarrow{OB'}$  とも書ける。

[確かめ]



$P$  が線分  $AB$  上にある

$$\iff \overrightarrow{OP} = t\overrightarrow{OA} + s\overrightarrow{OB}, \quad (t + s = 1, t \geq 0, s \geq 0)$$

$$f(\overrightarrow{OP}) = f(t\overrightarrow{OA} + s\overrightarrow{OB}) = t f(\overrightarrow{OA}) + s f(\overrightarrow{OB})$$

$$\overrightarrow{OP'} = t\overrightarrow{OA'} + s\overrightarrow{OB'}$$

だから  $A' \neq B' \Rightarrow P'$  は  $A'B'$  上.  $A' = B' \Rightarrow P' = A' = B'$ .

# 線形変換

## 図形の変換

### 直線の像

$f$  を線形変換とし  $f(A) = A'$ ,  $f(B) = B'$  とするとき, 直線  $AB$  の像は直線  $A'B'$  または点  $A' (= B')$  である.

[確かめ] 線分の場合の条件  $t \geq 0, s \geq 0$  を外せばすぐわかる。

# 線形変換

## 図形の変換

[例題 4.]

$f: \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$  で決まる線形変換.

$l: \text{直線 } y = 2x - 1 \cdots (*)$

のとき  $l$  の  $f$  による像を求めよう.

(\*) により

$x = 0 \Rightarrow y = -1$  したがって  $l$  は  $A(0, -1)$  を通る.

$x = 1 \Rightarrow y = 1$  したがって  $l$  は  $B(1, 1)$  を通る.

$$f(\overrightarrow{OA}) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \overrightarrow{OA'},$$

$$f(\overrightarrow{OB}) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \overrightarrow{OB'}$$

$l$  の像は  $A'(-2, 1)$ ,  $B'(1, 4)$  をとおる直線だから傾き  $-\frac{5}{3}$  で  $5x + 3y = 7$