

--	--	--	--	--	--	--

8.1.

(1) (1,0) を (2,0) に,(0,1) を (1,1) へ移す 1 次変換を表す行列を求めよ.

(1) 一次変換を表す行列を \mathbf{A} とおくと,

$$f: \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{したがって } \mathbf{A} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$f: \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{したがって } \mathbf{A} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2つの等式を並べて書くと

$$\mathbf{A} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \left(\mathbf{A} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{A} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

一方

$$\mathbf{A} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{A}$$

だから

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) (1) の線形変換で、図のような図形がどのような図形に移されるか描け.

$$f \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{だから } O(0,0) \text{ は } O(0,0) \text{ に移る.}$$

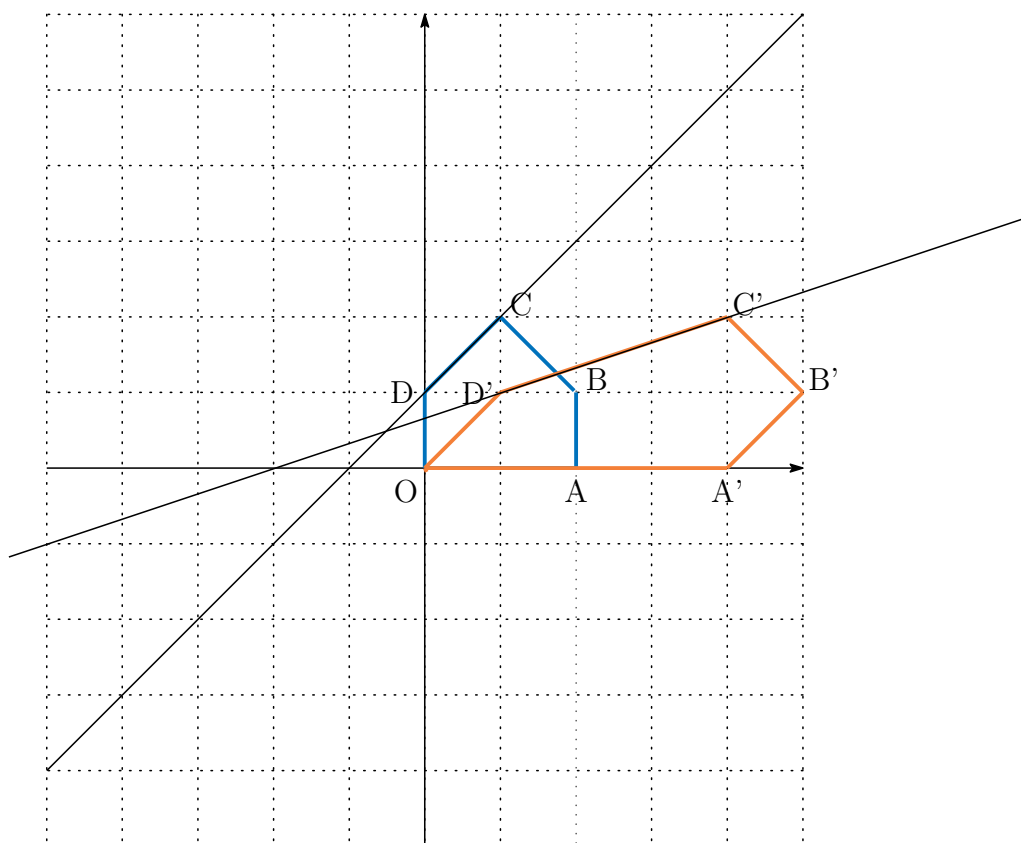
$$f \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{だから } A(2,0) \text{ は } A'(4,0) \text{ に移る.}$$

$$f \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{だから } B(2,1) \text{ は } B'(5,1) \text{ に移る.}$$

$$f \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{だから } C(1,2) \text{ は } C'(4,2) \text{ に移る.}$$

$$f \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{だから } D(0,1) \text{ は } D'(1,1) \text{ に移る.}$$

線分は線分に移るから青い図形はオレンジの図形に移る。



(3) (1) の線形変換で、直線 $y = x + 1$ がどのような図形に移されるかを描け.

直線 $y = x + 1$ を l と書く。線形変換は直線を直線(または1点)に移す。 l の像の直線を l' と書く。

l は点 $D(0,1)$, $C(1,2)$ を通るから方向ベクトルは $\overrightarrow{DC} = (1,1)$ 。

l' は点 $D'(1,1)$, $C'(4,2)$ を通るから方向ベクトルは $\overrightarrow{D'C'} = (3,1)$ 。

したがって l' の方程式は $y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$ 。