本日やること

1. 行列の対角化
   - 復習：固有値・固有ベクトルの定義・行列の対角化
   - 対称行列の直交行列による対角化
   - 2 次形式

固有値・固有ベクトル

復習：固有値・固有ベクトル・行列の対角化

[復習：固有値・固有ベクトルの定義] $\boldsymbol{A}$ ：正方行列に対して

λ ：固有値, $\boldsymbol{x}$ ：固有ベクトル $\iff$ $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$

行列の対角化

対角化可能となる条件

[復習：対角化可能性] n 次正方行列 $\boldsymbol{A}$ について次の (i), (ii) は同値である：

(i) $\boldsymbol{A}$ は n 個の線形独立な固有ベクトル $\{\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n\}$ を持つ.

(ii) $\boldsymbol{A}$ は正則行列 $\boldsymbol{P}$ によって

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

と変形される。これを対角化という。このとき

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 & \cdots & \boldsymbol{u}_n \end{pmatrix}, \quad \lambda_1, \cdots, \lambda_n \text{ は固有値}$$

行列の対角化

対称行列の直交行列による対角化

対称行列と内積

$\boldsymbol{A} = {}^t\boldsymbol{A}$ となる行列を対称行列という。

$\boldsymbol{A}$ が対称行列 $\iff$ 任意のベクトル $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ に対して $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{A}\boldsymbol{v})$

[確かめ] $\Rightarrow$:
左辺 $= {}^t(\boldsymbol{A}\boldsymbol{u})\boldsymbol{v} = {}^t\boldsymbol{u}{}^t\boldsymbol{A}\boldsymbol{v} = {}^t\boldsymbol{u}\boldsymbol{A}\boldsymbol{v} =$ 右辺

$\Leftarrow$:

行列の対角化

対称行列の直交行列による対角化

対称行列の固有ベクトル

(I) n 次対称行列は n 個の固有ベクトル $\{\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n\}$ を持つ.

(II) $\{\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n\}$ は大きさ 1 で互いに直交するとしてよい。

(I) の証明は省略します。

[(II) の確かめ] (i) 相異なる固有値に対する固有ベクトルは直交する。なぜなら

$$\lambda \neq \mu,\ \ \boldsymbol{A}\boldsymbol{u} = \lambda\boldsymbol{u},\ \ \boldsymbol{A}\boldsymbol{v} = \mu\boldsymbol{v}$$

とすると

$$\lambda\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{A}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}\cdot\mu\boldsymbol{v} = \mu(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v})$$

だから $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} = 0$.

(ii) 同じ固有値に対する固有ベクトルでも互いに直交するとしてよい。たとえば $\boldsymbol{A}\boldsymbol{u} = \lambda\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}$, $|\boldsymbol{u}| = 1$ のとき,

$$\overline{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{v} - (\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u})\boldsymbol{u} \quad \text{とすると} \quad \boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{v}} = \lambda\overline{\boldsymbol{v}},\ \ \overline{\boldsymbol{v}} \perp \boldsymbol{u}$$

だから $\boldsymbol{v}$ のかわりに $\overline{\boldsymbol{v}}$ をとればよい。3 つ以上のベクトルの場合も同様に考える。

行列の対角化

対称行列の直交行列による対角化

対称行列の直交行列による対角化

対称行列 $\boldsymbol{A}$ は直交行列 $\boldsymbol{T}$ によって

$$ {}^t\boldsymbol{T}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} $$

のように対角化できる．ここで $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ は $\boldsymbol{A}$ の固有値となる。

[考え方]　固有ベクトル $\{\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n\}$ を大きさ 1 で互いに直交するようにとり

$\boldsymbol{T} = (\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n)$

とすればよい。

行列の対角化

2 次形式

2 次形式の定義

対称行列 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ に対して x, y の二次式

$$(x, y)\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (= ax^2 + 2bxy + cy^2)$$

を (2 変数の)2 次形式という。

行列の対角化

2 次形式

2 次形式の標準形

$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ が直交行列 $\boldsymbol{T} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix}$ によって

$$ {}^t\boldsymbol{T}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} $$

のように対角化されているとき, 2 次形式は

$$ (x, y)\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x', y')\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \lambda x'^2 + \mu y'^2 $$

のように変形される。ただし

$$ x' = t_{11}x + t_{12}y, \quad y' = t_{21}x + t_{22}y $$

である。これを 2 次形式の標準形という。

行列の対角化
2 次形式

[例] $(x, y)\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 3x^2 - 2xy + 3y^2$　の標準形を求める。

$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ とおく。

$\boldsymbol{A}$ の固有値：$\lambda = 2, 4,$

$\lambda = 2$ に対する固有ベクトル：$\boldsymbol{p}_1 = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$

大きさ 1 のものは $\boldsymbol{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$

$\lambda = 4$ に対する固有ベクトルは $\boldsymbol{p}_2 = c_2\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix},$

大きさ 1 のものは $\boldsymbol{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix},$

行列の対角化

2 次形式

だから直交行列 $\boldsymbol{T} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ により

$$(x, y)\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x', y')\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = 2x'^2 + 4y'^2$$

のように変形される。ただし

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = {}^t\boldsymbol{T}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y \end{pmatrix}$$

行列の対角化

2 次形式