本日やること

1. 復習：固有値・固有ベクトル
2. 行列の対角化
   - 行列の対角化の定義
   - 対角化可能となる条件

復習：固有値・固有ベクトル

固有値・固有ベクトルの定義

復習：固有値・固有ベクトルの定義

正方行列 $\boldsymbol{A}$ に対し列ベクトル $\boldsymbol{x}$, 複素数 λ が

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$$

となるとき

λ ： $\boldsymbol{A}$ の固有値

$\boldsymbol{x}$ ： 固有値 λ に対する固有ベクトル

という。

固有値・固有ベクトル

固有値・固有ベクトルの定義

[例]

$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とするとき

$\boldsymbol{A}$ の固有値は 1 と 2

固有値 1 に対する固有ベクトルは $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

固有値 2 に対する固有ベクトルは $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

[確かめ]

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 1 \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 1 \times \boldsymbol{x}$$

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \times \boldsymbol{y}$$

復習：固有値・固有ベクトル

固有値・固有ベクトルの計算

固有値の求め方

正方行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値 λ は

$$|\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{E}| = 0 \quad (\text{これを 固有方程式という})$$

の解である。

行列の対角化

行列の対角化の定義

行列の対角化の定義

n 次正方行列 $\boldsymbol{A}$ が対角化可能であるとは

$\boldsymbol{P}$: n 次正則行列

$\lambda_1, \cdots, \lambda_n$: 複素数

があって

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

となること。

$\boldsymbol{P}$ を対角化行列という

行列の対角化

対角化可能となる条件

対角化可能となる条件

n 次正方行列 $\boldsymbol{A}$ について次の (i), (ii) は同値である：

(i) $\boldsymbol{A}$ は正則行列 $\boldsymbol{P}$ によって対角化可能である.

(ii) $\boldsymbol{A}$ は n 個の線形独立な固有ベクトル $\{\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n\}$ を持つ.

このとき $\boldsymbol{P}$ と $\{\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n\}$ の間には

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 & \cdots & \boldsymbol{u}_n \end{pmatrix} \cdots (\star)$$

の関係があり, $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ は固有値となる。

行列の対角化
対角化可能となる条件

[(i)⇒(ii) の確かめ]

$$\text{(i)} \Leftrightarrow \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}\begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \cdots (\star\star)$$

ここで $\{\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n\}$ を $(\star)$ で決めると

$$(\star\star) \text{ の左辺} = \boldsymbol{A}\begin{pmatrix} \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 & \cdots & \boldsymbol{u}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}\boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{A}\boldsymbol{u}_2 & \cdots & \boldsymbol{A}\boldsymbol{u}_n \end{pmatrix}$$

行列の対角化

対角化可能となる条件

$$(\star\star) \text{ の右辺} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 & \cdots & \boldsymbol{u}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1 \boldsymbol{u}_1 & \lambda_2 \boldsymbol{u}_2 & \cdots & \lambda_n \boldsymbol{u}_n \end{pmatrix}$$

両辺を比較して $\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}_1 = \lambda_1 \boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{A}\boldsymbol{u}_n = \lambda_n \boldsymbol{u}_n$ だから $\{\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n\}$ は固有ベクトル。
さらに $\boldsymbol{P}$ が正則であることにより $\{\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n\}$ は線形独立.

行列の対角化

対角化可能となる条件

[(i)$\Leftarrow$(ii) の確かめ] ：(i)$\Rightarrow$(ii) の確かめを逆に追っていけばよい。

行列の対角化
対角化可能となる条件

[例題 6]

(1) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 \end{pmatrix}$ が対角化可能か判定し, 可能な場合対角化する。

(Step 1) 固有方程式を解いて固有値を求める。

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E}| &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 & -3 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & -3 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ -3 & -2-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda)^2(-2-\lambda) = 0 \end{aligned}$$

を解いて固有値は $\lambda = 1$(2 重解), -2.

行列の対角化

対角化可能となる条件

(Step 2-1) $\lambda = 1$ に対する固有ベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ を求める。

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 1 \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\iff \left(\begin{pmatrix} 1 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を解けばよい。

行列の対角化

対角化可能となる条件

これは明らかに

$$x_1\text{は任意，}\ x_2 + x_3 = 0$$

と同値だから解は

$$\boldsymbol{x} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad c_1,\ c_2\ \text{は 0 でない任意の数}$$

行列の対角化

対角化可能となる条件

(Step 2-2) $\lambda = -2$ に対する固有ベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ を求める。

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = -2 \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\iff \left(\begin{pmatrix} 1 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 \end{pmatrix} - (-2) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} 3 & -3 & -3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を解けばよい。

行列の対角化

対角化可能となる条件

Gauss の消去法で解く.

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

だから

$$\begin{cases} x_1 \quad -x_3 = 0 \\ \quad x_2 \quad\quad = 0 \end{cases}$$

$$\boldsymbol{x} = c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad c_3 \text{ は 0 でない任意の数}$$

行列の対角化

対角化可能となる条件

(Step 3) 対角化する。

(Step 2-1) より $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ は $\lambda = 1$ に対する固有ベクトルの組で, 1 次独立である。

(Step 2-2) より $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は $\lambda = -2$ に対する固有ベクトルである。

得られた固有ベクトルを並べて

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

を作る。

行列の対角化
対角化可能となる条件

$$|\boldsymbol{P}| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

だから $\boldsymbol{P}$ は正則, したがって $\boldsymbol{A}$ は対角化可能。

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

となる。

行列の対角化
対角化可能となる条件

(Step 4) 検算する。$\boldsymbol{P}^{-1}$ を求めると

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

だから

$$\boldsymbol{P}^{-1} = \begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

これを用いて

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -3 & -3\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & -3 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}$$

行列の対角化
対角化可能となる条件

[例題 6]

(2) $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ が対角化可能か判定し, 可能な場合対角化する。

(Step 1) 固有方程式を解いて固有値を求める。

$$|\boldsymbol{B} - \lambda \boldsymbol{E}| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ -1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (-1) \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1-\lambda \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 2-\lambda & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (-1) \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1-\lambda \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & -1+2-\lambda & 1+(1-\lambda)(2-\lambda) \end{vmatrix}$$

行列の対角化

対角化可能となる条件

$$
\begin{aligned}
&= (-1)^2 \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -1+2-\lambda & 1+(1-\lambda)(2-\lambda) \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1-\lambda & \lambda^2-3\lambda+3 \end{vmatrix} \\
&= (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \lambda^2-3\lambda+3 \end{vmatrix} \\
&= (1-\lambda)\{\lambda^2-3\lambda+3-1\} \\
&= -(1-\lambda)^2(\lambda-2) = 0
\end{aligned}
$$

を解いて固有値は $\lambda = 1(2\text{ 重解}), 2.$

行列の対角化

対角化可能となる条件

(Step 2-1) $\lambda = 1$ に対する固有ベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ を求める。

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 1 \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を解けばよい。

行列の対角化
対角化可能となる条件

Gauss の消去法で解く.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

だから

$$x_1 = x_2,\ x_3 = 0$$

$$\boldsymbol{x} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad c_1 \text{ は 0 でない任意の数}$$

行列の対角化

対角化可能となる条件

(Step 2-2) $\lambda = 2$ に対する固有ベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ を求める。

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 2 \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を解けばよい。

行列の対角化
対角化可能となる条件

Gauss の消去法で解く．

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

だから

$$x_1 = 0,\ x_2 = x_3$$

$$\boldsymbol{x} = c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad c_2 \text{ は 0 でない任意の数}$$

行列の対角化

対角化可能となる条件

(Step 3) 対角化可能性の判定。 線形独立な固有ベクトルが 2 個しか作れないから対角化可能ではない。