本日やること

1. 線形変換
   - 復習:線形変換
   - 復習：回転を表す線形変換
   - 直交行列・直交変換
2. 固有値・固有ベクトル
   - 固有値・固有ベクトルの定義
   - 固有値・固有ベクトルの計算

線形変換

復習:線形変換

[線形変換]　平面の点 $\mathrm{P}(x,y)$ に対して,

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

によって平面の点 $\mathrm{P}'(x',y')$ を対応させる写像 $f(x,y)=(x',y')$ を線形変換という. $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ を f を表す行列という

$\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{p}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \boldsymbol{A}$ とおくと, ベクトルをベクトルに移す写像と考えられ,

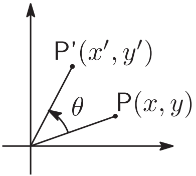
$$f(\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{p}$$

となる.

線形変換

復習：回転を表す線形変換

平面上の点の回転を表す線形変換



原点の周りで点を θ(rad) 回転させる変換 f は線形変換であり

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdots (\star)$$

と表される。

線形変換

直交行列・直交変換

直交行列の定義

$n\ (n=2,3,\cdots)$ 次正方行列 $\boldsymbol{A}$ が直交行列であるとは

$$ {}^t\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E} $$

が成り立つこと。

線形変換

直交行列・直交変換

直交行列の列ベクトルの性質

$$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n), \quad \boldsymbol{a}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}, j = 1, 2, \cdots, n$$

とおくとき

$$\boldsymbol{A} \text{ が直交行列} \iff \begin{cases} |\boldsymbol{a}_j|^2 = 1, & j = 1, 2, \cdots, n \\ \boldsymbol{a}_i \bullet \boldsymbol{a}_j = 0, & i \neq j \end{cases}$$

線形変換
直交行列・直交変換

[確かめ]

$$
{}^t\boldsymbol{A}\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ a_{1i} & \cdots & a_{ni} \\ & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & a_{1j} & \\ & \vdots & \\ & a_{nj} & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & \vdots & \\ \cdots & \boldsymbol{a}_i \bullet \boldsymbol{a}_j & \cdots \\ & \vdots & \end{pmatrix}
$$

${}^t\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}$ の (i,j) 成分は $\boldsymbol{a}_i \bullet \boldsymbol{a}_j$ だから明らか。

線形変換

直交行列・直交変換

[例 3] 回転を表す行列は直交行列である。なぜなら

$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ とすると ${}^t\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ だから

$$ {}^t\boldsymbol{A}\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \cos^2\theta + \sin^2\theta & -\cos\theta\sin\theta + \sin\theta\cos\theta \\ -\sin\theta\cos\theta + \cos\theta\sin\theta & \sin^2\theta + \cos^2\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} $$

線形変換

直交行列・直交変換

直交変換の定義

直行行列で表される線形変換を直交変換という。

線形変換

直交行列・直交変換

直交変換の性質

1. 直交変換はベクトルの内積・大きさを変えない。
2. ベクトルの内積・大きさを変えない線形変換は直交変換である。
3. 直交変換の合成変換は直交変換である。

[準備] 行列 (またはベクトル) $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ に対して ${}^t(\boldsymbol{AB}) = {}^t\boldsymbol{B}\,{}^t\boldsymbol{A}$

[1 の確かめ] $\boldsymbol{A}$ は直行行列, $f(\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{Ap}$ とする。任意のベクトル $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$ に対して

$$f(\boldsymbol{p}) \bullet f(\boldsymbol{q}) = {}^t(\boldsymbol{Ap}) \bullet \boldsymbol{Aq} = ({}^t\boldsymbol{p}\,{}^t\boldsymbol{A})\boldsymbol{Aq} = {}^t\boldsymbol{p}({}^t\boldsymbol{A}\boldsymbol{A})\boldsymbol{q} = {}^t\boldsymbol{p}(\boldsymbol{E})\boldsymbol{q} = {}^t\boldsymbol{p}\boldsymbol{q} = \boldsymbol{p} \bullet \boldsymbol{q}$$

だから内積は変わらない。

$$|f(\boldsymbol{p})|^2 = f(\boldsymbol{p}) \bullet f(\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{p} \bullet \boldsymbol{p} = |\boldsymbol{p}|^2$$

だから大きさも変わらない。

線形変換

直交行列・直交変換

[2 の確かめ] $f(\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{p}$,

$$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n), \quad \boldsymbol{a}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_j \text{ は基本ベクトル}, \ j = 1, 2, \cdots, n$$

とおく.

$\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ の性質より

$$|\boldsymbol{e}_1|^2 = \cdots = |\boldsymbol{e}_n|^2 = 1, \ \boldsymbol{e}_i \bullet \boldsymbol{e}_j = 0, (i \neq j).$$

$f(\boldsymbol{e}_j) = \boldsymbol{a}_j$ であり, f はベクトルの内積・大きさを変えないから

$$|\boldsymbol{a}_1|^2 = \cdots = |\boldsymbol{a}_n|^2 = 1, \ \boldsymbol{a}_i \bullet \boldsymbol{a}_j = 0, (i \neq j)$$

だから $\boldsymbol{A}$ は直交行列

線形変換

直交行列・直交変換

直交変換の性質・追加

4. 直交変換は 2 点の距離を変えない。
5. 直交変換は角の大きさを変えない。

[確かめ]

$f(\mathrm{P}) = \mathrm{P}'$, $f(\mathrm{Q}) = \mathrm{Q}'$ とし, $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \boldsymbol{p}$, $\overrightarrow{\mathrm{OP}'} = \boldsymbol{p}'$, $\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \boldsymbol{q}$, $\overrightarrow{\mathrm{OQ}'} = \boldsymbol{q}'$ とする。

$$|\boldsymbol{p}| = |\boldsymbol{p}'|, |\boldsymbol{q}| = |\boldsymbol{q}'|, \boldsymbol{p} \bullet \boldsymbol{q} = \boldsymbol{p}' \bullet \boldsymbol{q}'$$

だから

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2 &= |\boldsymbol{q} - \boldsymbol{p}|^2 = |\boldsymbol{q}|^2 - 2(\boldsymbol{p} \bullet \boldsymbol{q}) + |\boldsymbol{p}|^2 \\ &= |\boldsymbol{q}'|^2 - 2(\boldsymbol{p}' \bullet \boldsymbol{q}') + |\boldsymbol{p}'|^2 = |\boldsymbol{q}' - \boldsymbol{p}'|^2 = |\overrightarrow{\mathrm{P'Q'}}|^2 \end{aligned}$$

で 4 がわかる。5 も同様。

固有値・固有ベクトル

固有値・固有ベクトルの定義

固有値・固有ベクトルの定義

正方行列 $\boldsymbol{A}$ に対し列ベクトル $\boldsymbol{x}$, 複素数 λ が

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$$

となるとき

λ ： $\boldsymbol{A}$ の固有値

$\boldsymbol{x}$ ： 固有値 λ に対する固有ベクトル

という。

固有値・固有ベクトル
固有値・固有ベクトルの定義

[例]

$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とするとき

$\boldsymbol{A}$ の固有値は　1 と 2

固有値 1 に対する固有ベクトルは $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

固有値 2 に対する固有ベクトルは $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

[確かめ]

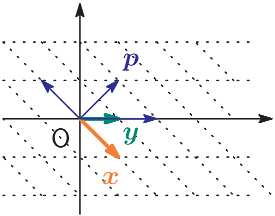
$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 1 \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 1 \times \boldsymbol{x}$$

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \times \boldsymbol{y}$$

固有値・固有ベクトル

固有値・固有ベクトルの定義

固有値・固有ベクトルによって線形変換の様子がよくわかる。



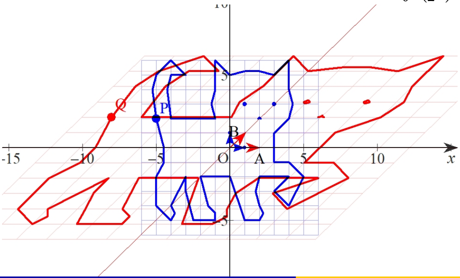
$\boldsymbol{A}$ によって決まる線形変換を f とする。f は
ベクトルを

$\boldsymbol{x}$ 方向に 1 倍ひきのばすから $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$

$\boldsymbol{y}$ 方向に 2 倍ひきのばすから $f(\boldsymbol{y}) = 2\boldsymbol{y}$

図のベクトル $\boldsymbol{p}$ は $\boldsymbol{p} = -\boldsymbol{x} + 2\boldsymbol{y}$ だから

$$f(\boldsymbol{p}) = -f(\boldsymbol{x}) + 2f(\boldsymbol{y}) = -\boldsymbol{x} + 4\boldsymbol{y}$$



固有値・固有ベクトル

固有値・固有ベクトルの計算

固有値の求め方

正方行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値 λ は

$$|\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E}| = 0 \quad \text{（これを 固有方程式という）}$$

の解である。

[確かめ]　λ が $\boldsymbol{A}$ の固有値, $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ が固有ベクトルならば $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ であるが

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x} \iff \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \lambda\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \iff (\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{E})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \cdots (\star)$$

ところで $\boldsymbol{B}$: 正方行列, $\boldsymbol{x}$: 列ベクトル に対して

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \text{ の解は } \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \text{ のみ} \iff \boldsymbol{B} \text{ は正則行列} \iff |\boldsymbol{B}| \neq 0$$

であった。(P.102, P106) だから $(\star)$ が $\boldsymbol{0}$ でない解 $\boldsymbol{x}$ を持つ条件は

$$|\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{E}| = 0$$

固有値・固有ベクトル

固有値・固有ベクトルの計算

注意：固有値が複素数になる場合

1. 固有方程式は実数解を持たない場合があるが複素数の解は必ずあるので, 固有値は複素数と考えることにする。
2. ベクトル, 行列も成分が複素数であるものを考える。
3. 成分が複素数であるベクトル, 行列の演算も, 実数成分の場合と全く同じに考える.

固有値・固有ベクトル

固有値・固有ベクトルの計算

[例題 1] $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ の固有値, 固有ベクトルを計算する。

(Step 1) 固有値を求める。 固有方程式

$$|\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E}| = \left| \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -5 \\ 2 & -3-\lambda \end{vmatrix}$$
$$= \lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda + 1)(\lambda - 2) = 0$$

を解いて固有値は $\lambda = -1, 2.$

固有値・固有ベクトル

固有値・固有ベクトルの計算

(Step 2)　$\lambda = 2$ に対する固有ベクトルを求める。

$$\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 4x_1 - 5x_2 = 2x_1 \\ 2x_1 - 3x_2 = 2x_2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2x_1 - 5x_2 = 0 \\ 2x_1 - 5x_2 = 0 \end{cases} \iff x_2 = \frac{2}{5} x_1$$

だから固有ベクトルは

$$\boldsymbol{x} = c \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix} = c' \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} \ (c, c' \text{は 0 でない定数})$$

固有値・固有ベクトル

固有値・固有ベクトルの計算

(Step 3) $\lambda = -1$ に対する固有ベクトルを求める。

$$\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 4x_1 - 5x_2 = -x_1 \\ 2x_1 - 3x_2 = -x_2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 5x_1 - 5x_2 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases} \iff x_2 = x_1$$

だから固有ベクトルは

$$\boldsymbol{x} = c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \ (c, \text{は 0 でない定数})$$