

本日やること

① 線形変換

- 復習:線形変換
- 合成変換・逆変換
- 回転を表す線形変換

線形変換

復習:線形変換

[線形変換] 平面の点 $P(x, y)$ に対して,

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

によって平面の点 $P'(x', y')$ を対応させる写像 $f(x, y) = (x', y')$ を**線形変換**という。
 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ を **f を表す行列**という

$p = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $p' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = A$ とおき, ベクトル p をベクトル p' に移す写像と考えると

$$p' = f(p) = Ap$$

となる.

線形変換

合成変換・逆変換

線形変換の合成変換

線形変換 $f(p) = Ap$, $g(p') = Bp'$ の合成変換

$$g \circ f : p \mapsto g(f(p))$$

は線形変換となり

$$g \circ f(p) = BAp$$

である。

[確かめ]

$$g \circ f(p) = g(f(p)) = g(Ap) = BAp$$

だからあきらか。

線形変換

合成変換・逆変換

線形変換の逆変換

線形変換 $f(p) = Ap$, $g(p') = Bp'$ の合成変換 $g \circ f$ が恒等変換になるとき,
 g を f の逆変換といい f^{-1} で表す.

f が逆変換を持つ $\iff A$ が正則

であり

$$B = A^{-1}$$

である。

[確かめ]

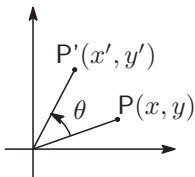
$g \circ f$ が恒等変換 $\iff BA = E \iff A$ が正則

だからあきらか。

線形変換

回転を表す線形変換

平面上の点の回転を表す線形変換



原点の周りで点を $\theta(\text{rad})$ 回転させる変換 f は線形変換であり

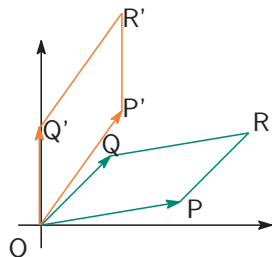
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdots (\star)$$

と表される。

線形変換

回転を表す線形変換

[確かめ] (Step 1.)



$$\begin{aligned}\vec{OP} &= \mathbf{p}, & \vec{OQ} &= \mathbf{q}, & \vec{OR} &= \mathbf{r} \\ \vec{OP}' &= \mathbf{p}', & \vec{OQ}' &= \mathbf{q}', & \vec{OR}' &= \mathbf{r}' \\ f(\mathbf{p}) &= \mathbf{p}', & f(\mathbf{q}) &= \mathbf{q}', & f(\mathbf{r}) &= \mathbf{r}',\end{aligned}$$

とする. f はすべての図形を合同な図形に移すから

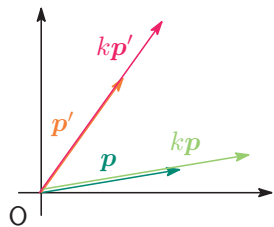
$$\begin{aligned}r = p + q &\Rightarrow \text{OPRQ は平行四辺形} \\ &\Rightarrow \text{OP'R'Q' は平行四辺形} \\ &\Rightarrow r' = p' + q'\end{aligned}$$

したがって

$$f(\mathbf{p} + \mathbf{q}) = f(\mathbf{p}) + f(\mathbf{q}) \cdots (\star 2)$$

線形変換

回転を表す線形変換

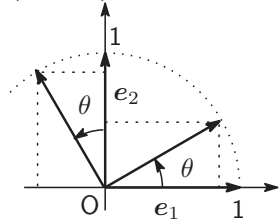


同様の考え方で スカラー k に対して

$$f(kp) = kf(p) \cdots (\star 3)$$

($\star 2$), ($\star 3$) を合わせて f は線形変換であることがわかる。

(Step 2.)



$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ とすると}$$

$$f(e_1) = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}, f(e_2) = \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}$$

線形変換

回転を表す線形変換

$P(x, y)$, $P'(x', y')$, $f(\overrightarrow{OP}) = \overrightarrow{OP'}$ とする。

$$\overrightarrow{OP} = xe_1 + ye_2,$$

だから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP'} &= f(\overrightarrow{OP}) = xf(e_1) + yf(e_2) \\ &= x \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\end{aligned}$$

これは (★) と同じ。

線形変換

合成変換・逆変換

[例：加法定理] 回転が線形変換であることから、次のように三角関数の加法定理を導くことができる。

f を α (rad) 回転させる変換, g を β (rad) 回転させる変換 とすると合成変換 $g \circ f$ は $\alpha + \beta$ (rad) 回転させる変換であるから

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \cos(\alpha + \beta) & -\sin(\alpha + \beta) \\ \sin(\alpha + \beta) & \cos(\alpha + \beta) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta & -\cos \alpha \sin \beta - \sin \alpha \cos \beta \\ \cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta & \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

成分を比較して

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta,$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

が導かれた。